

Anbefalte oppgaver uke 7

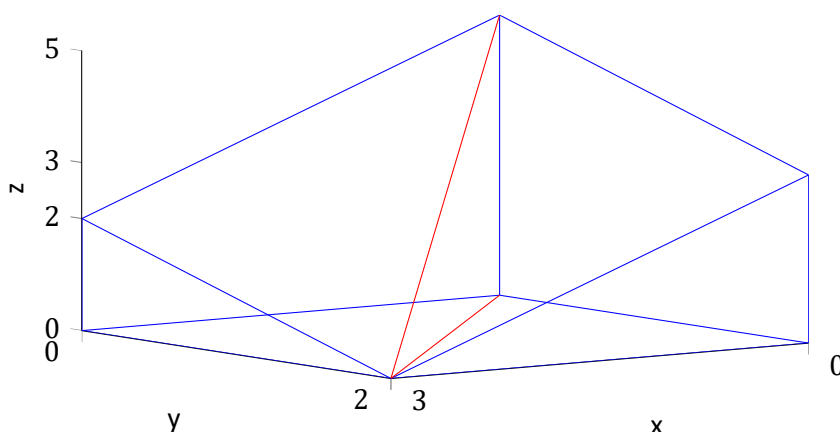
Våren 2019

Løsningsforslag

14.1.6 Integralet svarer til volumet som ligger over rektangelet D og under planet $z = 5 - x - y$. Figuren under viser hvordan vi kan dele opp volumet i to pyramider. Disse vil ha grunnflate i xz - og yz -planet, med "toppen" i punktet $(3, 2, 0)$. Vi finner derfor

$$\begin{aligned} \iint_D (5 - x - y) dA &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{2+5}{2} \right) + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{3+5}{2} \right) \\ &= 7 + 8 \\ &= 15, \end{aligned}$$

der det første leddet svarer til pyramiden til venstre i figuren, mens det andre svarer til pyramiden til høyre.



Figur 1: Volumet vi er ute etter ligger innenfor de blå linjene. Planet som de røde linjene ligger i deler volumet opp i to pyramider.

14.1.14 Me bruker først at integralet er lineært til å dela det opp i to integral på følgende vis,

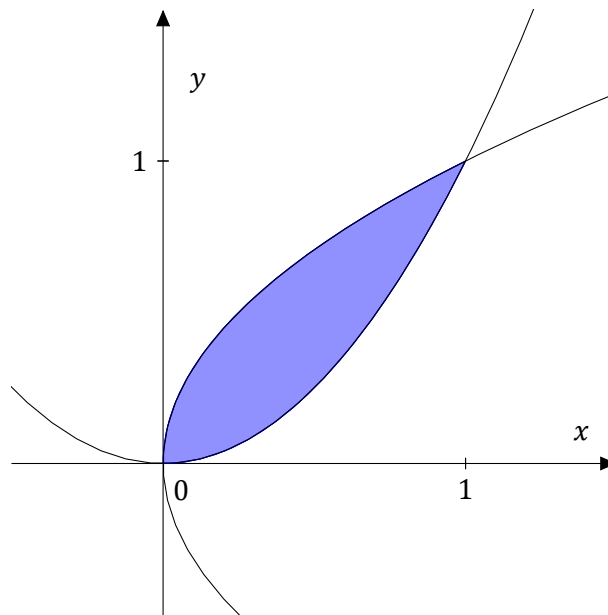
$$\iint_D (x + 3) dA = \iint_D x dA + 3 \iint_D dA.$$

Merk at området D som skal integreres over, gitt av $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, er det samme som den delen av disken gitt ved $x^2 + y^2 \leq 2^2$ som ligger i øvre halvdel av xy -planet. Dermed er D symmetrisk om y -aksen, og sidan x er ein odder funksjon vil bidraget til integralet av x på kvar side av y -aksen ha same absoluttverdi og motsatt forteikn sånn at integralet vert 0. Me står då igjen med $3 \iint_D dA$ som er tre gonger arealet av D , halvparten av ein disk med radius 2. Altså er svaret

$$\iint_D (x + 3) dA = 3 \iint_D dA = 3 \times \frac{\pi 2^2}{2} = 6\pi.$$

14.2.3 Integrasjonen i denne oppgaven er relativt rett frem. Vi integrerer først med hensyn på y , og så med hensyn på x , og ender opp med

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_{-x}^x \cos(y) \, dy \, dx &= \int_0^\pi [\sin(y)]_{-x}^x \, dx \\ &= \int_0^\pi 2 \sin(x) \, dx \\ &= [-2 \cos(x)]_0^\pi \\ &= 4. \end{aligned}$$



Figur 2: Det fargede området er det som ligger mellom de to kurvene.

14.2.9 Det første vi må gjøre er å finne skjæringspunktene mellom de to kurvene. Ved å sette likningen $y = x^2$ inn i likningen $x = y^2$ får vi likningen $x = x^4$, eller $x(1 - x^3) = 0$. Denne har løsningene $x = 0$ og $x = 1$, som svarer til henholdsvis $y = 0$ og $y = 1$. Skjæringspunktene er derfor $(0, 0)$ og $(1, 1)$. Vi vet også at $x^2 \leq \sqrt{x}$ for $0 \leq x \leq 1$ (se Figur 2), slik at

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Vi finner derfor

$$\begin{aligned}
 \iint_R xy^2 dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2 dy dx \\
 &= \int_0^1 x \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^{5/2} - x^7) dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{1}{8} x^8 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{7} - \frac{1}{8} \right] \\
 &= \frac{3}{56}.
 \end{aligned}$$

14.2.26 Hypotenusen i den rettvinklede trekanten kan beskrives ved hjelp av likningen $y = b - \frac{b}{a}x = b \left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Volumet er derfor gitt ved integralet

$$V = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(2 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy dx.$$

Det innerste integralet blir

$$\begin{aligned}
 \left[\left(2 - \frac{x}{a}\right)y - \frac{1}{2b}y^2 \right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} &= b \left(2 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \\
 &= \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(2 \left(2 - \frac{x}{a}\right) - \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right) \\
 &= \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(3 - \frac{x}{a}\right) \\
 &= \frac{b}{2} \left(3 - \frac{4}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2\right),
 \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{b}{2} \int_0^a \left(3 - \frac{4}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2\right) dx \\
 &= \frac{b}{2} \left[3x - \frac{2}{a}x^2 + \frac{1}{3a^2}x^3 \right]_0^a \\
 &= \frac{b}{2} \left[3a - 2a + \frac{1}{3}a \right] \\
 &= \frac{2}{3}ab.
 \end{aligned}$$

14.3.3 Siden funksjonen er positiv, kan vi integrere i hvilken rekkefølge vi vil.

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{y}{1+x^2} dA &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{y}{1+x^2} dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} [\arctan x]_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

14.3.14 Vi finner volumet ved å integrere høyden $z = z(x, y)$ over integrasjonsområdet S

$$\begin{aligned}V &= \iint_S z dA = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 [y \ln(x^2 + y^2)]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 y (\ln(1 + y^2) - \ln y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} [(1 + y^2) (\ln(1 + y^2) - 1) - (y^2 (\ln y^2 - 1))]_0^1 \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Merk at vi har brukt grensen $\lim_{y \rightarrow 0} y \ln y = 0$ i den siste overgangen.

En alternativ, kanskje enklere, måte løse denne oppgaven er å bruke observasjonen om integrasjonsområdet T fra Oppgave 14.3.13.

14.3.22 Me skal finna gjennomsnittsverdien av ein funksjon $f = f(x, y)$ i det todimensjonale domenet D , definert som

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{arealet av } D} \iint_D f(x, y) dA.$$

I dette tilfellet er D rektangelet gitt ved $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, der me må anta at $a < b$ og $c < d$ for at me i det heile tatt skal ha eit areal å snakka om. Arealet er då ganske enkelt $(b - a)(d - c)$. Sidan $f(x, y) = x^2$ finn me at integralet vert

$$\iint_D x^2 dA = \int_a^b x^2 dx \int_c^d dy = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b \times y \Big|_c^d = \frac{(b^3 - a^3)(d - c)}{3}.$$

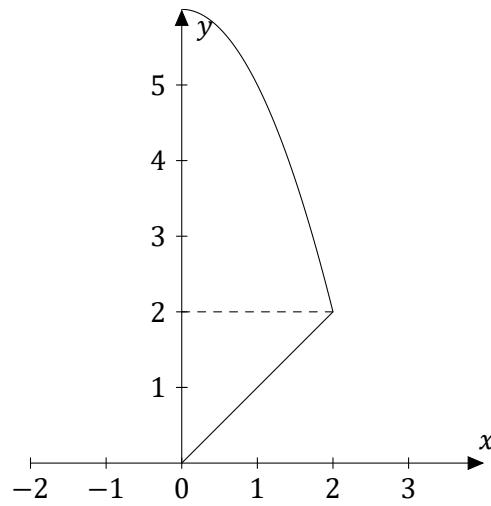
Dermed finn me at gjennomsnittsverdien av $f(x, y) = x^2$ på D er

$$\bar{f} = \frac{(b^3 - a^3)(d - c)}{3(b - a)(d - c)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{3},$$

der ein i siste overgang har brukt $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ba + a^2)$.

Review Exercise 14.6 Det første vi gjør er å skissere området som det integreres over. Området under den stiplede linjen i Figur 3 svarer til det første integralet, mens området over den stiplede linjen svarer til det andre integralet. Merk at $x = \sqrt{6 - y}$ er ekvivalent med $y = 6 - x^2$ for $x \geq 0$. Vi ser av figuren at området er gitt ved

$$0 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq 6 - x^2,$$



Figur 3: Integrasjonsområdet i oppgaven.

slik at

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^y f(x, y) dx dy + \int_2^6 \int_0^{\sqrt{6-y}} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_x^{6-x^2} f(x, y) dy dx. \end{aligned}$$