TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 6

Våren 2019

Løsningsforslag

$\boxed{13.1.4}$ I de kritiske punktene er de partiellderiverte lik 0. For funksjonen $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ har vi

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y, \quad f_y(x,y) = 4y^3 - 4x.$$

Disse er lik 0 når $x = y^3$ og $y^9 - y = 0$; altså må vi ha $y = \pm 1$ eller $y = 0$ og $x = y$. Dermed har vi funnet at de kritiske punktene til f er $(-1,-1)$, $(0,0)$, og $(1,1)$. For å klassifisere dem, ser vi på de andrederiverte

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2, \qquad f_{xy}(x,y) = -4$$
$$f_{yy}(x,y) = 12y^2,$$

Vi ser deretter på

$$AC - B^2 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

evaluert i de forskjellige kritiske punktene. For $(-1,-1)$ og $(1,1)$ har vi

$$AC - B^2 = 144 - 16 > 0, \quad A > 0,$$

som gir lokale minima. For $(0,0)$ har vi

$$AC - B^2 = 0 - 16 < 0,$$

som gir en sadel.

$\boxed{13.1.22}$ Vi har $f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$, og finner

$$f_x(x,y) = 1 - \frac{1}{yx^2}, \qquad f_y(x,y) = 8 - \frac{1}{xy^2}.$$

De kritiske punktene (x,y) løser altså

$$yx^2 = 1 \qquad 8xy^2 = 1.$$

Dette gir det kritiske punktet $(2, 1/4)$. Vi finner at $f(2,1/4) = 6$. Det må være et minimum siden f er positiv i første kvadrant, og $f(x,y)$ går mot ∞ når (x,y) nærmer seg x- eller y-aksen (p.g.a. $1/xy$-leddet), eller hvis (x,y) går mot uendelig i hvilken som helst retning (grunnet de lineære leddene). Mer formelt: for små nok $\varepsilon > 0$ og store nok $R > 0$, vil $f(x,y) > 100$ for alle punkter (x,y) som ligger på sidekantene av rektangelet med hjørner $(\varepsilon,\varepsilon)$, (R,ε), (ε,R) og (R,R). Siden unionen av rektangelet og dets indre er en lukket og begrenset mengde, vil funksjonen f (som er kontinuerlig) ha et minimum på denne mengden (Teorem 2 s. 746 i Adams 8. utg). Da vi har funnet et indre punkt med lavere verdi enn randpunktene, må minimum forekomme i et kritisk punkt (Teorem 1 s. 746). Siden det kun er ett kritisk punkt i første kvadrant, må dette være minimum. Merk også at andrederiverttesten kun kan vise at punktet er et *lokalt* minimum.

$\boxed{13.1.26}$ Vi vil maksimere $f(a,b,c) = ab^2c^3$ for positive a, b og c under betingelsen $a + b + c = 30$. Ved å skrive $a = 30 - b - c$ og sette inn i f, skal vi maksimere

$$f(b,c) = 30b^2c^3 - b^3c^3 - b^2c^4.$$

Vi løser ligningene

$$f_b(b,c) = 60bc^3 - 3b^2c^3 - 2bc^4 = 0, \qquad f_c(b,c) = 90b^2c^2 - 3b^3c^2 - 4b^2c^3 = 0.$$

Disse kan forenkles til

$$\begin{aligned} f_c(b,c) = 0 &\Leftrightarrow 90b^2c^2 - 3b^3c^2 - 4b^2c^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 90 - 3b - 4c = 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f_b(b,c) = 0 &\Leftrightarrow 60bc^3 - 3b^2c^3 - 2bc^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 60 - 3b - 2c = 0. \end{aligned}$$

Merk at vi har tillatt oss å dele på b og c, da vi vet at $b \neq 0$ og $c \neq 0$.

Ved å løse det resulterende lineære ligningssystemet, får vi løsningen $b = 10$ og $c = 15$, som gir $a = 5$. Det kritiske punktet svarer til et maksimum. For å se dette, merk først at vi maksimerer f over mengden[1]

$$a, b, c \geq 0 \qquad a + b + c = 30,$$

som er en lukket og begrenset mengde. Siden f er kontinuerlig, vet vi at et maksimum eksisterer. Et slikt maksimumspunkt forekommer enten i kritiske punkt, singulære punkt eller i randpunkt. Siden f er 0 langs randen og er deriverbar i alle indre punkt, må maksimum forekomme i et kritisk punkt. Siden vi kun fant ett kritisk punkt, må dette punktet være maksimumspunktet.

13.2.2 Funksjonen f er kontinuerlig og rektangelet lukket og begrenset, så vi har absolutte maksimum og minimum. Funksjonen gitt ved $f(x,y) = xy - 2x = x(y-2)$ har ingen kritiske punkter i det indre av domenet $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, så vi finner maksimale og minimale verdier på randa. Ved inspeksjon, for eksempel ved å parametrisere hver av de fire linjestykkene som utgjør randa til rektangelet, kan en overbevise seg om at det er på hjørnene ekstremalverdiene finnes. Så da har vi redusert oppgaven til å evaluere funksjonen i fire punkter og sammenligne disse:

$$f(-1,0) = 2, \quad f(-1,1) = 1, \quad f(1,0) = -2, \quad f(1,1) = -1.$$

Vi konkluderer at minimal verdi er -2 og maksimal verdi er 2.

13.2.6 Funksjonen er kontinuerlig og domenet lukket og begrenset, så vi har absolutte maksimum og minimum. Vi finner førsteordens partiellderiverte av funksjonen ved hjelp av produktregelen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y(1-x-y) - xy = y(1-2x-y), \\ f_y(x,y) &= x(1-x-y) - xy = x(1-x-2y). \end{aligned}$$

Kritiske punkter er punkter hvor begge disse er lik 0. Ved å sette de partiellderiverte lik 0 og manipulere ligningene, kommer vi frem til at hvis $y = 0$, så er $x = 0$ eller $x = 1$. Likeledes hvis $x = 0$, så er $y = 0$ eller $y = 1$. Disse punktene ligger alle på randa. For $y \neq 0$ og $x \neq 0$ må vi ha

$$1 - 2x - y = 0 \quad \text{og} \quad 1 - x - 2y = 0,$$

som gir $x = \frac{1}{3} = y$. Funksjonen evaluert i dette punktet er

$$f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27}.$$

På randa av området er $f = 0$. Altså har f sitt absolutte minimum på randa, og absolutt maksimum i punktet $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

[1] I følge oppgaven skal vi kun se på punkter $a, b, c > 0$, men det skader ikke å ta med punkter der en av a, b og c er 0, siden f er 0 i disse punktene.

13.2.12 Vi kaller funksjonen vår $f(x,y,z) = xz + yz$, og finner først de partiellderiverte

$$f_x(x,y,z) = z, \quad f_y(x,y,z) = z, \quad f_z(x,y,z) = x + y.$$

Dermed er alle de indre kritiske punktene til funksjonen i xy--planet langs linjen $x = -y$, hvor funksjonen er identisk lik 0. På sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ kan vi skrive funksjonen som

$$f(x,y,z) = (x+y)z = \pm(x+y)\sqrt{1 - x^2 - y^2} = g(x,y),$$

hvor $x^2 + y^2 \leq 1$. Vi observerer at $g = 0$ på randa $x^2 + y^2 = 1$, og at den har både positive og negative verdier på områdets indre; altså kan vi redusere til å se på området $x^2 + y^2 < 1$. Vi finner de partiellderiverte av g:

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= \pm\left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \frac{(x+y)(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right) \\ &= \pm\frac{1 - x^2 - y^2 - xy - x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ g_y(x,y) &= \pm\frac{1 - x^2 - y^2 - xy - y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Disse er 0 når

$$2x^2 + y^2 + xy = 1 = x^2 + 2y^2 + xy,$$

altså når $x^2 = y^2$. Hvis $x = -y$ er $g = f = 0$. Hvis $x = y$, har vi $2x^2 + x^2 + x^2 = 1$, så $x^2 = \frac{1}{4}$ og $x = \pm\frac{1}{2}$. Fra dette konkluderer vi med at vi må finne verdien av f for i alt fire punkter på randa, da ulike valg av fortegn gir tilhørende z--koordinater $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi har nå kartlagt alle punkter hvor f kan ha ekstremalverdier (på henholdsvis randa til kula og langs linja $x = -y$ i xy-planet), og finner at vi har maksimum $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i punktene $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, og minimum $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ i punktene $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Merk at alle disse fire punktene ligger på randa.

13.3.2 **a)** Avstanden fra $(3,0)$ til (x,y) er gitt ved

$$d(x,y) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$

For punkter på parabelen kan vi sette inn $y = x^2$, slik at funksjonen vi ønsker å minimere er

$$\tilde{g}(x) = d(x, x^2) = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}.$$

For å lette regningen, observerer vi at kvadratrotfunksjonen er monotont økende, så vi kan like gjerne minimere

$$g(x) = \tilde{g}(x)^2 = (x-3)^2 + x^4.$$

Vi setter den deriverte lik 0:

$$g'(x) = 2x - 6 + 4x^3 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0,$$

her har vi observert at $x = 1$ må være en rot, og utført polynomdivisjon. Ved å se på diskriminanten til andre faktor, ser vi at denne ikke har noen reelle røtter. Dermed er punktet $(1,1)$ minimerende, og

$$d(1,1) = \sqrt{(1-3)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

er den minste avstanden fra parabelen $y = x^2$ til punktet $(3,0)$.

b) Vi ønsker å minimere funksjonen (som over)

$$d(x,y) = (x-3)^2 + y^2,$$

gitt bibetingelsen $y - x^2 = 0$. Dette gir Lagrange--funksjonen

$$L(x,y,\lambda) = (x-3)^2 + y^2 + \lambda(y - x^2),$$

med deriverte

$$\begin{aligned} L_x &= 2x - 6 - 2x\lambda, \\ L_y &= 2y + \lambda, \\ L_\lambda &= y - x^2. \end{aligned}$$

Dette gir $\lambda = -2y$ og $x = 3/(1-\lambda)$, slik at

$$0 = -\frac{\lambda}{2} - \left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2.$$

Denne likninga har reell løsning $\lambda = -2$, som gir $x = y = 1$ og, som over, at den minimale distansen er $d = \sqrt{6}$.
Merk: I dette løsningsforslaget har vi brukt bokens konvensjon med å definere Lagrange-funksjonen som $L(x,y,\lambda) = d(x,y) + \lambda(y - x^2)$ fremfor slik det ble gjort i forelesnignen, der vi brukte $L(x,y,\lambda) = d(x,y) - \lambda(y - x^2)$. Dette har lite å si regnemessig, og eneste forskjellen blir at vi får $\lambda = -2$ istedet $\lambda = 2$. Det endelige svaret blir selvsagt det samme.

$\boxed{13.3.4}$ Vi skal finne ekstremalverdiene til funksjonen gitt ved

$$f(x,y,z) = x + y - z$$

på sfæren $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, og velger å gjøre dette ved Lagranges multiplikatormetode, med funksjonen

$$L(x,y,z) = x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Denne har første partiellderiverte

$$\begin{aligned} L_x &= 1 + 2x\lambda \\ L_y &= 1 + 2y\lambda \\ L_z &= -1 + 2z\lambda \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1, \end{aligned}$$

vi ser umiddelbart at $x = y$, og fra de to første likningene finner vi $1 + 2x\lambda = 0$, som kombinert med tredje likning gir:

$$0 = 2x + 2z.$$

Dette gir $x = y = -z$, og vi bruker siste likning for å finne hvilke punkter dette tilsvarer:

$$3x^2 = 1,$$

så vi har ekstremalverdier i de to punktene

$$p = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{og} \quad q = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Innsatt i f gir dette

$$f(p) = \sqrt{3} \quad \text{og} \quad f(q) = -\sqrt{3},$$

som er henholdsvis maksimal og minimal verdi.

$\boxed{13.3.12}$ Vi ønsker å maksimere $\sum_{i=1}^{n} x_i$ gitt at $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Vi skriver $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Merk at $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ beskriver en lukket og begrenset mengde i $\mathbb{R}^n$, og at funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

er kontinuerlig. Det finnes altså et slikt maksimum, og vi kan finne det ved hjelp av Lagrangemultiplikatormetoden fordi

$$\nabla\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right) = 2\mathbf{x},$$

som aldri er null på n-sfæren (hvorfor?). Lagrangefunksjonen blir

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right),$$

som leder til

$$\partial_{x_i} L = 1 + 2\lambda x_i = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$
$$\partial_\lambda L = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0.$$

Merk at vi nødvendigvis må ha $\lambda \neq 0$, for ellers kan ikke de n første likningene være oppfylt. Vi får derfor $x_i = -1/(2\lambda)$ for $i = 1, \dots, n$, som innsatt i den siste likningen gir

$$\frac{n}{4\lambda^2} - 1 = 0,$$

eller $\lambda = -\sqrt{n}/2$ ($\lambda = \sqrt{n}/2$ vil gi minimum), og derfor $x_i = 1/\sqrt{n}$ for $i = 1, \dots, n$. Maksimum blir derfor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

$\boxed{\text{R. Ex. 13.12}}$ På grunn av symmetri vil ellipsoiden inneholde boksen så lenge den inneholder punktet $(1, 2, 3)$, altså når

$$\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} \leq 1.$$

Siden vi er ute etter å minimere volumet kan vi like godt sette likhetstegn her; dersom punktet ikke ligger på overflaten av ellipsoiden vil vi alltid kunne gjøre ellipsoiden litt mindre og fortsatt ha punktet innenfor.

Hvorfor vil det finnes et minimum? Merk at likningen som a, b, c må oppfylle impliserer at $a \geq 1$, $b \geq 2$ og $c \geq 3$. Spesielt betyr dette at volumet til ellipsoiden går mot uendelig når $|(a, b, c)| \to \infty$. På tilsvarende måte som i 13.3.3 b) kan vi derfor konkludere at det må finnes et globalt minimum. Siden

$$\nabla\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1\right) = -2\left(\frac{1}{a^3}, \frac{4}{b^3}, \frac{9}{c^3}\right) \neq 0$$

kan vi finne dette minimumet med Lagrangemultiplikatormetoden.

Vi får Lagrangefunksjonen

$$L(a, b, c, \lambda) = \frac{4\pi}{3} abc + \lambda\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1\right),$$

og derfor likningene

$$\begin{aligned}
\partial_a L &= \frac{4\pi}{3}bc - \lambda\frac{2}{a^3} = 0 \\
\partial_b L &= \frac{4\pi}{3}ac - \lambda\frac{8}{b^3} = 0 \\
\partial_c L &= \frac{4\pi}{3}ab - \lambda\frac{18}{c^3} = 0 \\
\partial_\lambda L &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Om vi multipliserer de tre første likningene med a, b og c får vi

$$\frac{4\pi}{3}abc - \frac{2\lambda}{a^2} = 0, \quad \frac{4\pi}{3}abc - \frac{8\lambda}{b^2} = 0, \quad \frac{4\pi}{3}abc - \frac{18\lambda}{c^2} = 0,$$

som impliserer at

$$\frac{2\lambda}{a^2} = \frac{8\lambda}{b^2} = \frac{18\lambda}{c^2}.$$

Siden vi nødvendigvis må ha $\lambda \neq 0$ (fordi $a, b, c > 0$), betyr dette at

$$\frac{1}{a^2} = \frac{4}{b^2} = \frac{9}{c^2} = \frac{1}{3},$$

der den siste likheten kommer fra innsetting i likningen for $\partial_\lambda L$.

Den minste ellipsoiden som inneholder boksen svarer følgelig til $a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$ og $c = 3\sqrt{3}$, med volum

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\pi.$$