

Anbefalte oppgaver uke 4

Våren 2019

Løsningsforslag

10.5.4 Ved å fullføre kvadrata ser ein at likninga

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x - 8y = 8$$

kan skrivast som

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 9z^2 = 8,$$

som igjen er det same som

$$(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 + 9z^2 = 16.$$

Me deler på 16 for å normalisera høgresida til 1, og endar opp med

$$\left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{4/3}\right)^2 = 1,$$

som er standardlikninga til ein ellipsoide med sentrum i $(-2, 1, 0)$ og halvaksar 4, 2 og $4/3$.

10.5.5 Her har vi

$$\begin{aligned} z &= x^2 + 2y^2 \\ &= \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2, \end{aligned}$$

slik at dette er en elliptisk paraboloid sentrert i origo. Når man skal skissere flaten kan det være nyttig å observere at skjæringene med hvert plan $z = h$ (der $h > 0$) er ellipser med halvaksar på \sqrt{h} og $\sqrt{h/2}$.

12.1.12 Grafen til $f(x, y) = \sin(x)$ for $x \in [0, 2\pi]$ og $y \in [0, 1]$ er gitt i Figur 1.

12.1.40 Funksjonen f tar bare ikke-negative verdier. Vi ønsker derfor å se på nivåflaten som svarer til $f(x, y, z) = c^2$, der $c \geq 0$. Likningen

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = c^2$$

kan skrives om til

$$x^2 + y^2 = c^2 z^2,$$

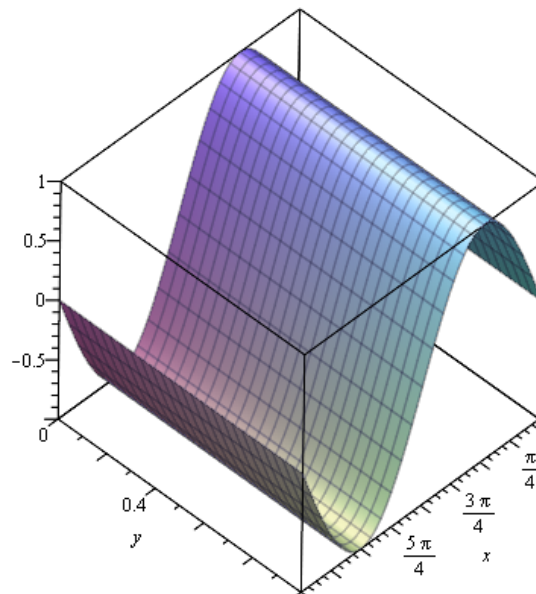
eller

$$r = c|z|$$

i sylinderkoordinater. Nivåflatene er derfor sirkulære kjegler (uten origo, som ikke er i domenet til f) med akse langs z -aksen. Konstanten c bestemmer vinkelen α mellom kjeglen og z -aksen. Nærmere bestemt er denne gitt ved

$$\alpha = \arctan(c).$$

Spesialtilfellet $c = 0$ svarer til en rett linje. Nivåflaten for $c = 1$ er gitt i Figur 2.



Figur 1: Grafen i oppgave 12.1.12.

12.2.6 Merk at dersom vi fikserer enten $x = 0$ eller $y = 1$ ser vi at eneste mulige kandidat for grensen er 0. Derfor prøver vi å vise at grensen er nettopp dette.

Observer at dersom a og b er reelle tall har man alltid

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

som følger av at $(a - b)^2 \geq 0$. Ved å velge $a = x$ og $b = y - 1$ har vi dermed at

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} \\ &\leq \frac{1}{4} \frac{(x^2 + (y-1)^2)^2}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}(x^2 + (y-1)^2), \end{aligned}$$

som klart går mot 0 når $(x, y) \rightarrow (0, 1)$.

Alternativt: Fordi $x^2 + (y-1)^2 \geq x^2$, har vi at

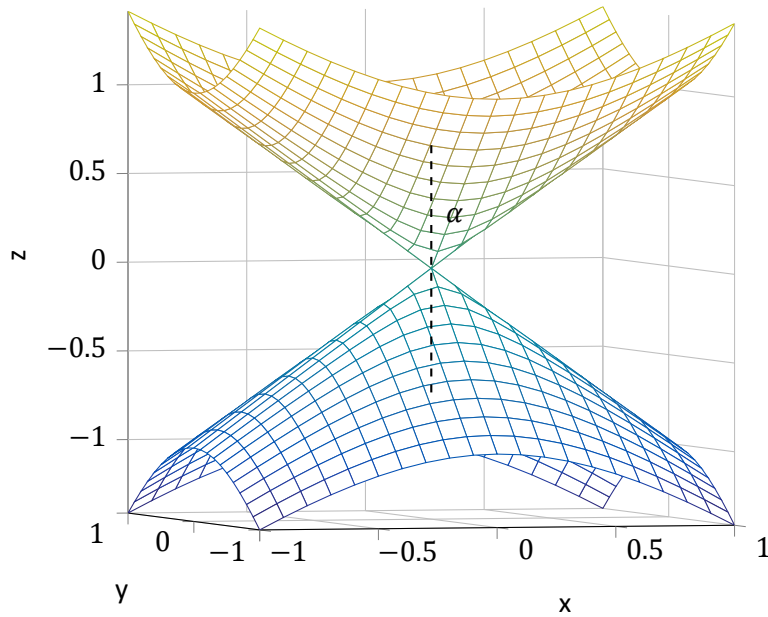
$$0 \leq \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} \leq \frac{x^2(y-1)^2}{x^2} = (y-1)^2.$$

Dermed har vi ved skviseteoremet at

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (y-1)^2 = 0.$$

12.2.9 Vi ser først på hva uttrykket går mot langs linjer på formen $y = ax$. Vi har at

$$\frac{\sin(x(ax))}{x^2 + (ax)^2} = \frac{a}{1 + a^2} \frac{\sin(ax^2)}{ax^2},$$

Figur 2: Nivåflaten som svarer til $c = 1$ i oppgave 12.1.40.

og dermed er

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=ax}} = \frac{a}{1+a^2},$$

der vi har brukt den velkjente grensen $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$. Siden uttrykket går mot forskjellige verdier avhengig av hvilken linje (dvs hvilken a) vi velger, eksisterer ikke grensen.

Merk: Om vi ønsker å vise at en grense eksisterer er det ikke nok å sjekke at grensene langs hver linje eksisterer og er like!

12.3.5 Vi ønsker å finne de første ordens deriverte til funksjonen f definert ved $f(x, y) = \arctan(y/x)$. Først finner vi den deriverte med hensyn på x , ved å betrakte y som en konstant. Vi bruker kjerne-regelen:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Spesielt er

$$\partial_x f(-1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

På tilsvarende måte finner vi

$$\begin{aligned} \partial_y f(x, y) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

og

$$\partial_y f(-1, 1) = \frac{1}{2}.$$

12.3.14 Vi finner først de partiellderiverte:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \frac{1 \cdot (x + y) - (x - y) \cdot 1}{(x + y)^2} \\ &= \frac{2y}{(x + y)^2} \\ \partial_y f(x, y) &= -\frac{2x}{(x + y)^2}.\end{aligned}$$

Fra dette finner vi $f_x(1, 1) = 1/2$ og $f_y(1, 1) = -1/2$. Merk også at $f(1, 1) = 0$. Tangentplanet inneholder dermed punktet $(1, 1, 0)$ og har normalvektor $(1, -1, -2)$ (skalert opp for å få heltall). Derfor blir

$$\begin{aligned}((x, y, z) - (1, 1, 0)) \cdot (1, -1, -2) &= 0 \\ x - y - 2z &= 0\end{aligned}$$

likningen til tangentplanet i punktet $(1, 1, 0)$.

Normallinjen går gjennom $(1, 1, 0)$, og har retningsvektor lik normalvektoren til tangentplanet. Den kan derfor parametriseres som

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, -1, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

12.4.6 Vi regner først ut den førstederiverte til f med hensyn på x , og finner

$$\partial_x f(x, y) = \frac{y \cos(xy)}{1 + \sin(xy)},$$

som vi så bruker for å regne ut

$$\begin{aligned}\partial_{xx} f(x, y) &= \frac{-y^2 \sin(xy)(1 + \sin(xy)) - y^2 \cos(xy)^2}{(1 + \sin(xy))^2} \\ &= \frac{-y^2(\sin(xy) + \overbrace{\sin(xy)^2 + \cos(xy)^2}^{=1})}{(1 + \sin(xy))^2} \\ &= -\frac{y^2}{1 + \sin(xy)}, \\ \partial_{yx} f(x, y) &= \frac{(\cos(xy) - xy \sin(xy))(1 + \sin(xy)) - xy \cos(xy)^2}{(1 + \sin(xy))^2} \\ &= \frac{(\cos(xy) - xy)(1 + \sin(xy))}{(1 + \sin(xy))^2} \\ &= \frac{\cos(xy) - xy}{1 + \sin(xy)}.\end{aligned}$$

Vi kan nå spare oss selv arbeid ved å observere at x og y spiller samme rolle i f . Vi kan derfor finne de deriverte med hensyn på y ved å bytte om på x og y over. I tillegg vet vi at $f_{xy} = f_{yx}$ fra Teorem 1 på side 698 i boken. Dermed har vi

$$\begin{aligned}\partial_y f(x, y) &= \frac{x \cos(xy)}{1 + \sin(xy)}, \\ \partial_{yy} f(x, y) &= -\frac{x^2}{1 + \sin(xy)}, \\ \partial_{xy} f(x, y) &= \frac{\cos(xy) - xy}{1 + \sin(xy)}.\end{aligned}$$

12.4.17 Me skal visa at funksjonen

$$u(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/4t}$$

oppfyller den partielle differensiallikninga

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kjent som den eindimensjonale varmelikninga/diffusjonslikninga. Her kan $u(x, t)$ til dømes representera temperaturen i eit punkt x ved tida t . Me ser berre på $t > 0$ ettersom $u(x, t)$ ikkje er definert for $t \leq 0$.

Me startar med å partiellderivera med omsyn på t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} t^{-1/2} \right) e^{-x^2/4t} + t^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-x^2/4t} \right) \\ &= -(1/2)t^{-3/2} e^{-x^2/4t} + t^{-1/2} e^{-x^2/4t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - x^2/4t \right) \\ &= -(1/2)t^{-3/2} e^{-x^2/4t} + t^{-1/2} e^{-x^2/4t} (x^2/4t^2) \\ &= -(1/2)t^{-3/2} e^{-x^2/4t} + (1/4)x^2 t^{-5/2} e^{-x^2/4t}. \end{aligned}$$

Deretter finn me den partiellderiverte med omsyn på x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= t^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2/4t} \right) \\ &= t^{-1/2} e^{-x^2/4t} \left(\frac{\partial}{\partial x} - x^2/4t \right) \\ &= t^{-1/2} e^{-x^2/4t} (-x/2t) \\ &= -(1/2)xt^{-3/2} e^{-x^2/4t}. \end{aligned}$$

Frå dette uttrykket finn me

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -(1/2)t^{-3/2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) e^{-x^2/4t} + x \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2/4t} \right) \right) \\ &= -(1/2)t^{-3/2} \left(e^{-x^2/4t} - (1/2)x^2 t^{-1} e^{-x^2/4t} \right) \\ &= -(1/2)t^{-3/2} e^{-x^2/4t} + (1/4)x^2 t^{-5/2} e^{-x^2/4t}, \end{aligned}$$

der me i parantesen i første linje har satt inn for den deriverte av eksponensialuttrykket som me fann ovanfor. Av dette ser me at $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, så $u(x, t)$ oppfyller varmelikninga.

Ei tolking av løysinga u for dei interesserte: Merk at $u(x, t) > 0$ for alle $t > 0$ og at $u(x, t) \rightarrow 0$ i alle punkt x når $t \rightarrow \infty$. Når $t \rightarrow 0$ har ein òg at $u(x, t) \rightarrow 0$, utanom i $x = 0$ der $u(0, t) \rightarrow \infty$. Dermed kan ein tolka denne løysinga som at ein startar med «uendeleg høg temperatur» i punktet $x = 0$ og temperatur lik 0 i alle andre punkt. Denne temperaturen vil så fordela seg jamnt utover i rommet ettersom tida går, før den etter «uendeleg lang tid» vil gå mot temperaturen omgjevningene hadde ved $t = 0$, nemleg 0. Funksjonen $(1/\sqrt{4\pi})u(x, t)$ vert kalla *fundamentalløysinga* til varmelikninga, eller den såkalla «varmekjernen» (*heat kernel*), og kan brukast til å finna løysinga av varmelikninga når $u(x, 0) = g(x)$ der g er ein gitt funksjon for starttemperaturen.