TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 3

Våren 2019

Løsningsforslag

$\boxed{11.1.9}$ Den aktuelle kurven er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t).$$

Hastigheten er den tidsderiverte av posisjonen:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-3\sin t, -4\sin t, 5\cos t).$$

Farten er lengden av hastighetsvektoren:

$$\begin{aligned} v(t) = |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{(-3\sin t)^2 + (-4\sin t)^2 + (5\cos t)^2} \\ &= \sqrt{25\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = 5. \end{aligned}$$

Akselerasjonen er den tidsderiverte av hastigheten:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-3\cos t, -4\cos t, -5\sin t) = -\mathbf{r}(t)$$

Kurven er skjæringskurven mellom kuleskallet $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ og planet $4x = 3y$. Dette er en sirkel i rommet med radius 5 og senter i origo. Merk: Denne oppgaven ligner veldig på Exercise 3, s. 631 i læreboka. Her finner du en mer utfyllende gjennomgang.

$\boxed{11.1.16}$ Fra oppgaveteksten har vi at posisjonen til partikkelen i planet er gitt av

$$\mathbf{r}(t) = \left(x(t), \frac{3}{x(t)}\right),$$

og at partikkelen beveger seg til høyre i planet, det vil si $\frac{dx}{dt} > 0$. Fra kjerneregelen har vi at hastigheten er

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \left(\frac{dx}{dt}, -\frac{3}{x^2}\frac{dx}{dt}\right).$$

Farten til partikkelen er gitt av lengden til hastighetsvektoren,

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(-\frac{3}{x^2}\frac{dx}{dt}\right)^2} = \left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1 + \frac{9}{x^4}}.$$

Det er opplyst at når partikkelen er i punktet $(x, y) = (2, 3/2)$ så er farten 10. Ved innsetting av $x = 2$ får vi

$$\frac{5}{4}\left|\frac{dx}{dt}\right|\Bigg|_{(2,3/2)} = 10.$$

Dette sammen med opplysningen om at partikkelen går mot høyre gir

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(2,3/2)} = 8, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{(2,3/2)} = -\frac{3}{x^2}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(2,3/2)} = -6. \tag{1}$$

Dermed er hastigheten i dette punktet $(8, -6)$.

$\boxed{11.3.5}$ Vi setter først $x^2 = 4y^2$, slik at $x = \pm 2y$. For at kurven skal gå gjennom punktet $(2, -1, 4)$, må vi velge $x = -2y$. Vi setter så $y = t$, som gir parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (-2t, t, 4t^2).$$

$\boxed{11.3.15}$ Vi ser at kurven beskriver skjæringen mellom en paraboloide og et plan, slik at den gir en ellipse i dette planet. Dette forteller oss at vi bør se etter en måte å parametrisere kurven ved hjelp av trigonometriske funksjoner.

Vi begynner med å eliminere z og komplettere kvadratene:

$$2x - 4y - 1 = z = x^2 + y^2,$$

som kan skrives om til

$$-1 = (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4,$$

eller, på standard ellipseform

$$1 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2.$$

For å oppfylle denne likningen kan vi velge $x(t) = 1 + 2\cos t$ og $y(t) = -2 + 2\sin t$. Til slutt finner vi z ved å sette dette inn i likningen for planet, og får

$$z(t) = 2x(t) - 4y(t) - 1 = 2 + 4\cos t + 8 - 8\sin t - 1 = 9 + 4\cos t - 8\sin t.$$

Dette gir parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t, -2\,(1 - \sin t)\,, 9 + 4\cos t - 8\sin t)\,.$$

$\boxed{11.3.15}$ Vi har parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (at^2, bt, c\ln t).$$

Lengden av denne kurven for $1 \leq t \leq T$ er gitt av integralet

$$\begin{aligned} L &= \int_1^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \\ &= \int_1^T \sqrt{(2at)^2 + b^2 + (c/t)^2}\,dt \\ &= \int_1^T \frac{1}{t}\sqrt{4a^2t^4 + b^2t^2 + c^2}\,dt. \end{aligned}$$

Når $b^2 = 4ac$, har vi at

$$4a^2t^4 + b^2t^2 + c^2 = (2at^2 + c)^2,$$

og følgelig er

$$\begin{aligned} L &= \int_1^T \frac{1}{t}(2at^2 + c) = \int_1^T \left(2at + \frac{c}{t}\right)\,dt \\ &= \left[at^2 + c\ln t\right]_{t=1}^{t=T} = a(T^2 - 1) + c\ln T. \end{aligned}$$

$\boxed{11.4.3}$ Enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ er normaliseringen av hastighetsvektoren i et gitt punkt. Vi må altså finne både hastighet og fart for

$$\mathbf{r}(t) = \left(\cos t \sin t, \sin^2 t, \cos t\right).$$

Vi regner først ut hastigheten

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left(\cos^2 t - \sin^2 t, 2\cos t \sin t, -\sin t\right),$$

og finner så farta

$$\begin{aligned} v(t) = |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)^2 + (2\cos t \sin t)^2 + (-\sin t)^2} \\ &= \sqrt{\cos^4 t - 2\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t + 4\cos^2 t \sin^2 t + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{1 + \sin^2 t} \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\left(\cos^2 t - \sin^2 t, 2\cos t \sin t, -\sin t\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}(\cos 2t, \sin 2t, -\sin t). \end{aligned}$$

$\boxed{11.4.5}$ Vi skal vise at dersom en kurve har krumning $\kappa = 0$ overalt, så er kurven en rett linje. Vi kan anta at kurven, gitt ved $\mathbf{r}(s)$, er parametrisert ved buelengden s, slik at enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(s)$ i hvert punkt er lik tangentvektoren.

Da er skalaren $\kappa(s)$ lik

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|,$$

og at $\kappa(s) = 0$ for alle s betyr at hver komponent r_i i posisjonsvektoren $\mathbf{r}(s)$ oppfyller $r_i''(s) = 0$. Integrerer vi to ganger med hensyn på s finner vi at

$$r_i(s) = c_i + d_i s$$

og følgelig er

$$\mathbf{r}(s) = (r_1, r_2, r_3) = (c_1 + d_1 s, c_2 + d_2 s, c_3 + d_3 s).$$

Dette er parametriseringen av en rett linje i rommet (merk at akkurat samme framgangsmåte fungerer i alle dimensjoner).

$\boxed{11.5.4}$ En formel for krumningsradiusen κ er

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3},$$

så vi finner hastighet og akselerasjon for vår kurve

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left(3t^2, 2t, 1\right),$$

slik at

$$v(t) = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4},$$

og

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (6t, 2, 0).$$

Dermed er

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 6t\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k} - 12t^2\mathbf{k} - 2\mathbf{i} = -2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - 6t^2\mathbf{k},$$

og

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = \sqrt{4 + 36t^2 + 36t^4} = 2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}.$$

Til slutt finner vi altså at krumningen, som en funksjon av t, er

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}},$$

i punktet $t = 1$ har vi da

$$\kappa(1) = \left. \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} \right|_{t=1} = \frac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}}.$$

Krumningsradien blir dermed

$$\rho(1) = \frac{1}{\kappa(1)} = \frac{7\sqrt{14}}{\sqrt{19}}.$$