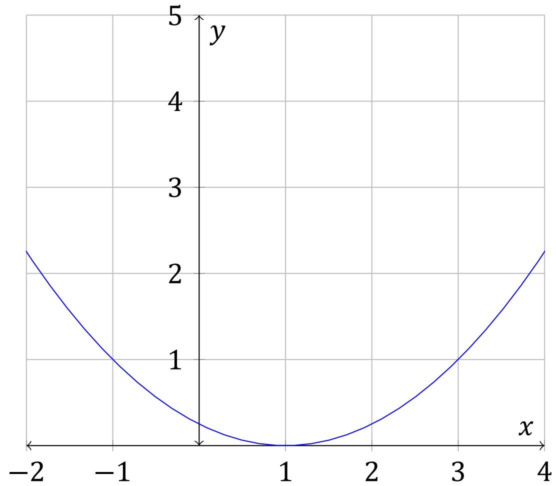
TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 2

Våren 2019

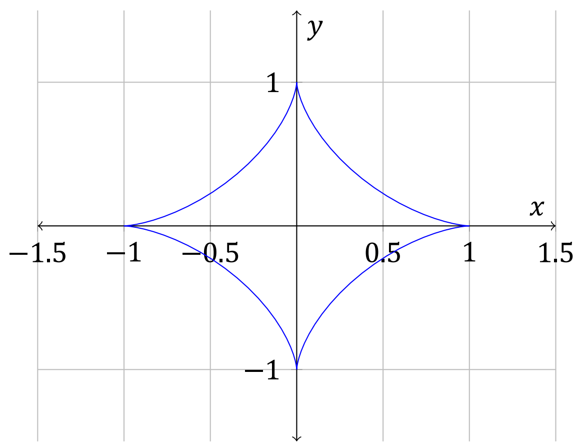
Løsningsforslag

$\boxed{8.2.1}$ Ved å løse $x = 1 + 2t$ for t, finner vi et uttrykk vi kan sette inn i $y = t^2$. Vi ser direkte at $t = \frac{1}{2}(x - 1)$, slik at $y = \frac{1}{4}(x - 1)^2$.



Figur 1: Den parametriserte kurven $x = 1 + 2t$, $y = t^2$

$\boxed{8.2.9}$ Siden $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, har vi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, som er likningen for en astroide, se Figur **??**. Legg merke til at kurven er innom alle fire kvadranter; dette er mulig fordi potensen er odde i både x og y.



Figur 2: Den parametriserte kurven $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$

$\boxed{8.3.9}$ Formelen for stigningstallet til en parametrisert kurve $x = f(t)$, $y = g(t)$ er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

I vårt tilfelle har vi

$$x = f(t) = t^3 + t, \quad f'(t) = 3t^2 + 1,$$

og

$$y = g(t) = 1 - t^3, \quad g'(t) = -3t^2,$$

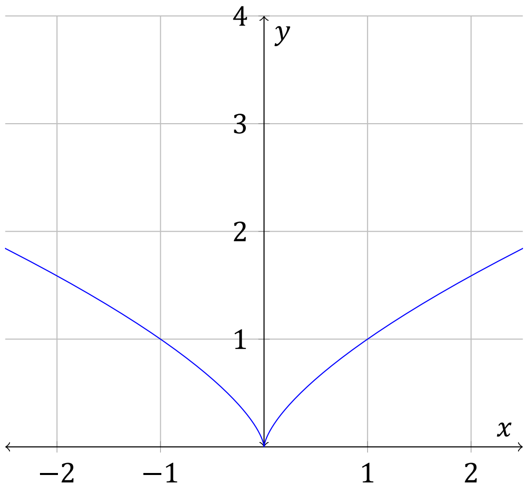
og vi skal finne stigningstallet i $t = 1$. Ved innsetting i formelen får vi

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\frac{g'(t)}{f'(t)}\right|_{t=1} = \left.\frac{-3t^2}{1+3t^2}\right|_{t=1} = -\frac{3}{4}.$$

$\boxed{8.3.17}$ En parameterisert kurve i planet med komponentfunksjoner $x = f(t)$ og $y = g(t)$ er glatt i alle punkter t hvor f' og g' er kontinuerlige og ikke tar verdien 0 samtidig, jamfør Teorem 1 på side 480 i læreboka.

Her har vi $x = f(t) = t^3$ og $y = g(t) = t^2$. Altså er $f'(t) = 3t^2$ og $g'(t) = 2t$ kontinuerlige funksjoner som ikke tar verdien 0 når $t \neq 0$, og kurven er derfor glatt i alle andre punkter enn muligens $(x, y) = (f(0), g(0)) = (0, 0)$.

Ved å eliminere parameteren t finner vi at $y = x^{2/3}$, hvis graf ikke er kontinuerlig i $x = 0$ (se Figur **??**). Altså er den parametriserte kurven *ikke* glatt i origo.



Figur 3: Den parametriserte kurven $x = t^3$, $y = t^2$

$\boxed{8.4.5}$ Formelen for buelengde er

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

For $x = t^2 \sin t$, $y = t^2 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, har vi

$$x'(t) = 2t \sin t + t^2 \cos t$$

og

$$y'(t) = 2t \cos t - t^2 \sin t$$

som gir

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= \left(2t \sin t + t^2 \cos t\right)^2 + \left(2t \cos t - t^2 \sin t\right)^2 \\ &= 4t^2 \sin^2 t + 4t^3 \sin t \cos t + t^4 \cos^2 t + 4t^2 \cos^2 t - 4t^3 \sin t \cos t + t^4 \sin^2 t \\ &= t^2\left(4 + t^2\right) \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2\,(4+t^2)}\,dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{4+t^2}\,dt.$$

Substitusjonen $u = 4 + t^2$ (fulgt av tilbakesubstitusjon for å slippe å beregne nye grenser) gir

$$L = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} u^{\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(4+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\left(\left(1+\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

$\boxed{8.5.3}$ Ved å multiplisere opp likningen med nevneren på høyre side får vi

$$3r\sin(\theta) - 4r\cos(\theta) = 5,$$

slik at likningen blir

$$3y - 4x = 5$$

i kartesiske koordinater. Dette er en rett linje.

$\boxed{8.5.8}$ Fremgangsmåten likner på den som ble brukt i forrige oppgave. Ved å kvadrere likningen får vi

$$r^2 = \frac{4}{\cos(\theta)^2 + 4\sin(\theta)^2}.$$

Multipliserer vi nå med nevneren finner vi

$$(r\cos(\theta))^2 + 4(r\sin(\theta))^2 = 4,$$

eller

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

i kartesiske koordinater. Siden dette kan skrives som

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$$

beskriver dette en ellipse sentrert i origo, med halvakser på 2 og 1.

Figur 4: Området utenfor kurven $r = 1$ og innenfor kurven $r = 1 - \cos\theta$

$\boxed{8.6.7}$ Likningen $1 - \cos(\theta) = 1$ er ekvivalent med $\cos(\theta) = 0$. De to kurvene skjærer derfor hverandre i punktene $[1, \pi/2] = (0, 1)$ og $[1, 3\pi/2] = (0, -1)$. Området vi skal beregne arealet av er skissert i Figur **??**. Siden området vi er ute etter er symmetrisk om x-aksen finner vi

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \left((1-\cos(\theta))^2 - 1^2\right) d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} - 2\cos(\theta)\right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(4\theta) - 2\sin(\theta)\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 2 + \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

der identiteten $\cos(\theta)^2 = (1 + \cos(2\theta))/2$ er brukt.

$\boxed{8.6.12}$ Her er det bare å sette inn i formelen. Siden $f(\theta) = \theta^2$ har vi

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \sqrt{(2\theta)^2 + (\theta^2)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \theta\sqrt{4 + \theta^2}\, d\theta. \end{aligned}$$

Hvis vi nå benytter substitusjonen $u = 4 + \theta^2$ finner vi

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\int_4^{4+\pi^2} u^{1/2}\, du \\ &= \frac{1}{3}\left((4+\pi^2)^{3/2} - 8\right). \end{aligned}$$