TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 14

Våren 2019

Løsningsforslag

$\boxed{16.4.4}$ Ved Divergensteoremet har vi at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{B}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV,$$

der $\mathcal{B}$ er kula begrenset av kuleskallet $\mathcal{S}$. Divergensen til vektorfeltet $\mathbf{F}$ er

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Siden vi skal integrere over ei kule, og integranden har sfærisk symmetri, gjør vi et variabelskifte til kulekoordinater. Vi får

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_{\mathcal{B}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \\
&= \iiint_{\mathcal{B}} \left(3x^2 + 3z^2 + 3y^2\right) \mathrm{d}V \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3R^2) R^2 \sin\phi \, d\phi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}R \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3R^2) R^2 \sin\phi \, d\phi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}R \\
&= \frac{12\pi a^5}{5}.
\end{aligned}$$

$\boxed{16.4.5}$ Vi skal finne fluksen av $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut gjennom kuleskallet $\mathcal{S}$ med sentrum i $(2, 0, 3)$ og radius 3. Ved Divergensteoremet har vi at

$$\begin{aligned}
I = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS &= \iiint_{\mathcal{B}} \textbf{div}\, \mathbf{F} \, dV \\
&= \iiint_{\mathcal{B}} 2(x + y + z) \, dV,
\end{aligned}$$

der $\mathcal{B}$ er kula med sentrum i $(2, 0, 3)$ og radius 3. Dette integralet kan evalueres ved å gjøre et variabelskifte til (forskjøvede) kulekoordinater. Alternativt kan vi observere at

$$I = 2(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})V,$$

der $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ er tyngdepunktet og V er volumet til kula $\mathcal{B}$. Tyngdepunktet til ei kule (med konstant massetetthet) er i sentrum og volumet av kula er gitt ved $V = 4\pi r^3/3$. Dermed har vi at

$$I = 2(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})V = 2(2 + 0 + 3)\frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 360\pi.$$

$\boxed{16.4.12}$ Vi har at

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = z + (1+z) - 2z = 1,$$

så

$$\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \operatorname{vol} R = \frac{1}{6}\pi a^3,$$

der R er området i første oktant begrenset av sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ og koordinatplanene. Ved å beregne fluksen av $\mathbf{F}$ ut gjennom de tre plane flatene av randa ∂R, kan vi bruke Divergensteoremet til å finne fluksen ut gjennom den sfæriske delen. Den delen av randa hvor $x = 0$ har normalvektor $-\mathbf{i}$. Vi har $\mathbf{F}(0, y, z) \cdot (-\mathbf{i}) = -y\,\mathbf{i}$, og ved å integrere i polarkoordinater får vi at fluksen ut gjennom denne flata er

$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} (-r\cos(\theta)) r\, d\theta\, dr = -\frac{1}{3}a^3.$$

Den delen av randa hvor $y = 0$ har normalvektor $-\mathbf{j}$, og siden $\mathbf{F}(x, 0, z) \cdot (-\mathbf{j}) = 0$, er fluksen ut gjennom denne flata lik 0. Den delen av randa hvor $z = 0$ har normalvektor $-\mathbf{k}$. Vi har $\mathbf{F}(x, y, 0) \cdot (-\mathbf{k}) = 2x\,\mathbf{i}$, og fluksen ut gjennom denne flata blir

$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} 2r\cos(\theta) r\, d\theta\, dr = \frac{2}{3}a^3.$$

Det følger nå fra Divergensteoremet at fluksen av $\mathbf{F}$ ut gjennom den sfæriske delen av randa ∂R er gitt ved

$$I = \frac{1}{6}\pi a^3 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{6}a^3(\pi - 2).$$

$\boxed{16.4.29}$ La $\mathbf{c} = c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k}$. Vi har at

$$\nabla \cdot (\phi\, \mathbf{c}) = \frac{\partial \phi}{\partial x}c_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y}c_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z}c_3 = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{c},$$

og Divergensteoremet gir

$$\iiint_D \nabla\phi \cdot \mathbf{c}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \phi(\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{N}})\, dS,$$

det vil si

$$\left(\iiint_D \nabla\phi\, dV\right) \cdot \mathbf{c} = \left(\iint_{\mathcal{S}} \phi\hat{\mathbf{N}}\, dS\right) \cdot \mathbf{c}.$$

Siden $\mathbf{c}$ er en vilkårlig vektor, ser vi (for eksempel ved å la $\mathbf{c}$ være $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) at vi må ha

$$\iiint_D (\nabla\phi)\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \phi\hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

$\boxed{16.5.1}$ Fra Stokes' teorem har vi at

$$I = \oint_{\mathcal{C}} xy\, dx + yz\, dy + zx\, dz = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA,$$

der $\mathcal{S}$ er den plane flata med rand $\mathcal{C}$ og $\mathbf{F}$ er vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

med tilhørende curl

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k}.$$

Flata $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$\mathcal{S}: \quad z = 1 - x - y, \qquad x, y, z \geq 0,$$

og denne har en konstant enhetsnormal

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

der minustegnet kommer fra den gitte orienteringa av randa $\mathcal{C}$. Vi får dermed

$$\begin{aligned} I = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\mathcal{S}} (y + z + x)\, dA \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\mathcal{S}} (y + (1 - x - y) + x)\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Areal}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Her brukte vi at Areal$(\mathcal{S}) = \sqrt{3}/2$, siden $\mathcal{S}$ er en likesidet trekant med sidelengde $\sqrt{2}$.

16.5.2 I stedet for å beregne linjeintegralet direkte bruker vi Stokes' teorem. Det er naturlig å la flaten S være den delen av sylinderen $z = y^2$ som ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 4$. Da er $\mathcal{C}$ randen til $\mathcal{S}$, og projeksjonen av $\mathcal{S}$ ned i xy-planet blir disken $x^2 + y^2 \leq 4$. Merk at integralet i oppgaven er lik

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

med

$$\nabla \times \mathbf{F} = -2\mathbf{k}.$$

Det neste vi trenger er arealelementet og den oppoverpekende enhetsnormalen på $\mathcal{S}$. Siden punktene på $\mathcal{S}$ tilfredstiller

$$G(x, y, z) = z - y^2 = 0$$

finner vi (merk at $\widehat{\mathbf{N}}$ blir oppoverpekende fordi $G_z > 0$)

$$dS = \left|\frac{\nabla G}{G_z}\right| dx\, dy$$

$$\widehat{\mathbf{N}} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|},$$

og dermed

$$\widehat{\mathbf{N}}\, dS = (-2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy.$$

Vi har nå

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (-2\mathbf{k}) \cdot (-2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy \\ &= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx\, dy \\ &= -2 \cdot \pi \cdot 2^2 \\ &= -8\pi, \end{aligned}$$

der vi har spart litt arbeid ved å benytte at vi kjenner arealet til en sirkelflate med radius 2.

16.5.3 Integralet er ikke enkelt å beregne i den formen det står, men fra Stokes' teorem er

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}$ er sirkelen $x^2+y^2 = a^2, z = 0$, orientert mot klokken sett ovenfra. Siden disken $x^2+y^2 \leq a^2$, $z = 0$ har samme rand kan vi benytte Stokes' teorem enda en gang for å konkludere at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{x^2+y^2\leq a^2} (\nabla \times \mathbf{F})|_{z=0} \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy.$$

Siden

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} &= \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 3y & -2xz \end{vmatrix} \\ &= -2z - 3\end{aligned}$$

finner vi derfor

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS &= -3 \iint_{x^2+y^2\leq a^2} dx\, dy \\ &= -3 \cdot \pi a^2 \\ &= -3\pi a^2.\end{aligned}$$

16.5.5 Skjæringskurven $\mathcal{C}$ er randa til en sirkelflate $\mathcal{S}$ med radius a i planet $x + y + z = 0$. For vektorfeltet

$$\mathbf{F} = (y, z, x),$$

har vi at

$$\nabla \times \mathbf{F} = -(1, 1, 1).$$

Dersom $\mathcal{C}$ er orientert slik at normalen til $\mathcal{S}$ er

$$\hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),$$

så er

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 1 + 1) = \sqrt{3}$$

på flata $\mathcal{S}$. Vi bruker nå Stokes teorem, og finner at

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} y\, dx + z\, dy + x\, dz &= \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \\ &= \sqrt{3} \iint_{\mathcal{S}} dS = \sqrt{3} \cdot \text{Areal}(\mathcal{S}) = \sqrt{3}\pi a^2,\end{aligned}$$

der vi har brukt at arealet til en sirkelflate med radius a er πa^2.

16.5.10 Vi bruker Stokes' teorem til å skrive om linjeintegralet av $\mathbf{F}$ til et fluksintegral av $\nabla \times \mathbf{F}$. Flaten vi skal integrere fluksen over er gitt ved

$$\mathcal{S}: \quad z = 3 - 2x - y, \qquad (x-1)^2 + 4y^2 \leq 16.$$

For å få riktig orientering, velger vi enhets-normalvektoren lik den enhets-normalvektoren til planet $2x + y + z = 3$ som har positiv z-koordinat, det vil si

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\,.$$

Normalkomponenten til curl'en av $\mathbf{F}$ er derfor gitt ved

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = ((2z - 1)\mathbf{i} + z\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(5z - 2).$$

Fluksen er derfor gitt ved

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\sqrt{6}}(5z - 2)\,dA &= \frac{1}{\sqrt{6}}\iint_{\mathcal{S}} (13 - 10x - 5y)\,dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\iint_{\mathcal{S}} (3 - 10(x - 1) - 5y)\,dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\iint_{\mathcal{S}} 3\,dA \\
&= \frac{3}{\sqrt{6}}\text{Areal}(\mathcal{S}),
\end{aligned}$$

der vi i nest siste linje brukte symmetri. Arealet av $\mathcal{S}$ er lik arealet av projeksjonen ned i xy-planet (en ellipse i dette tilfellet) ganget med $|\mathbf{n}|/|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}| = \sqrt{6}$. Ved å bruke formelen for arealet av en ellipse ser vi at arealet av $\mathcal{S}$ er $8\pi\sqrt{6}$. Fluksen er altså

$$\frac{3}{\sqrt{6}}(8\pi\sqrt{6}) = 24\pi.$$