Anbefalte oppgaver uke 13

Våren 2019

Løsningsforslag

$\boxed{16.3.6}$ Målet i denne oppgåva er å gå motsatt veg av beviset for divergensteoremet i planet på side 932 i boka. Me antar på same måte at R er eit regulært, lukka område i xy-planet som har ei rand $\mathcal{C}$ beståande av ei eller fleire stykkevis glatte, enkle lukka kurvar som i si parametrisering går mot klokka. Det er òg gitt at $\mathbf{N}$ er einingsnormalvektoren som peiker utover frå R og $\mathbf{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ er eit glatt vektorfelt på R. Me kan då anta at det todimensjonale divergensteoremet er gyldig,

$$\iint_R \textbf{div}\,\mathbf{F}\,dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds,$$

(hugs at her er **div** $\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$) og me skal bruka dette til å visa Greens teorem:

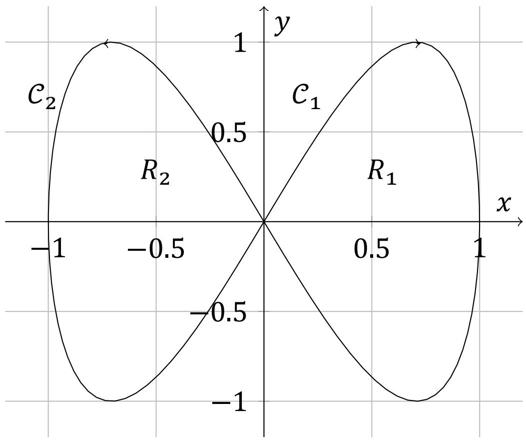
$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \left(= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\right).$$

For å bruka divergensteoremet må me først sørga for at integrandane i dei to flateintegrala er like, så me definerer hjelpe-vektorfeltet $\mathbf{G} = (F_2(x,y), -F_1(x,y))$. Sidan $\mathbf{F}$ er glatt vil òg $\mathbf{G}$ vera glatt og me ser at $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} =$ **div** $\mathbf{G}$. Med same argumentasjon som i beviset for divergensteoremet har me at $\mathbf{G}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ ($\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$ har bytta rolle i dette tilfellet). Ved rein innsetting, bruk av divergensteoremet for $\mathbf{G}$ og dei ovanståande identitetane finn me då

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \iint_R \textbf{div}\,\mathbf{G}\,dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G}\cdot\mathbf{N}\,ds = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \left(= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\right),$$

som var det me skulle visa.

$\boxed{16.3.7}$ Me er gitt plankurva $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t) = (\sin t, \sin 2t),\ 0 \le t \le 2\pi$, som illustrert nedanfor.



Vidare skal me evaluera $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, der $\mathbf{F} = (ye^{x^2}, x^3e^y)$. Det er truleg mindre arbeidskrevande å bruka Greens teorem til å finna verdien av dette linjeintegralet ved å gjera det om til eit flateintegral. Merk at kurva utgjer randa til to ikkje-overlappande område, lat oss kalla dei R_1 og R_2, med tilhøyrande randar $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ sånn at $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ for $0 \le t \le \pi$ og $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$ for $\pi \le t \le 2\pi$. Merk at $\mathcal{C}_1$ går med klokka, medan $\mathcal{C}_2$ går mot klokka. Dermed kan me dela linjeintegralet inn i to linjeintegral som begge er langs ei enkel, glatt, lukka kurve og me kan bruka Greens teorem på kvart av dei. Integranden for flateintegralet er begge tilfelle gitt ved $g(x,y) := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x^2e^y - e^{x^2}$. Legg merke til at g er symmetrisk om y-aksen, det vil seia $g(-x,y) = g(x,y)$. Dessutan kan me sjå at R_1 er speglinga av R_2 om y-aksen, som betyr at dersom $(x,y) \in R_2$ så er $(-x,y) \in R_1$. Dermed kan me skriva

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\oint_{-\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= -\iint_{R_1} g(x,y)\,dA + \iint_{R_2} g(x,y)\,dA \\
&= -\iint_{R_1} g(x,y)\,dA + \iint_{R_1} g(-x,y)\,dA \\
&= -\iint_{R_1} g(x,y)\,dA + \iint_{R_1} g(x,y)\,dA = 0,
\end{aligned}$$

der me i andre overgang har skifta forteikn på integralet langs $\mathcal{C}_1$ for å gå mot klokka, medan i fjerde overgang har me gjort variabelskiftet $(x,y) \mapsto (-x,y)$ i det andre flateintegralet for å integrera over R_1 i staden for R_2. Her ser me at bidraget frå kvart flateintegral nullar einannan ut og me står igjen med at integralet er null.

Review Exercise 16.3 Me skal evaluera

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(3y^2 + 2xe^{y^2}\right)dx + \left(2x^2ye^{y^2}\right)dy \qquad \text{(mot klokka)}$$

langs randa til parallellogrammet R med hjørne i (0,0), (2,0), (3,1) og (1,1). Som vanleg mistenker me at dette kan gjerast lettare ved bruk av Greens teorem, og me identifiserer $F_1(x,y) = 3y^2 + 2xe^{y^2}$ og $F_2(x,y) = 2x^2ye^{y^2}$. Altså er

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4xye^{y^2} - (6y + 4xye^{y^2}) = -6y.$$

Merk at parallellogrammet R kan parametriserast på ein x-enkel måte som $y \le x \le y+2$, $0 \le y \le 1$. Dermed får me

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \left(3y^2 + 2xe^{y^2}\right)dx + \left(2x^2ye^{y^2}\right)dy &= \iint_R (-6y)\,dA = -6\int_0^1\int_y^{y+2} y\,dx\,dy \\
&= -6\int_0^1 2y\,dy = -6\left[y^2\right]_0^1 = -6.
\end{aligned}$$

Review Exercise 16.10 La R være området som ligger innenfor C. Sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ rundt C er per definisjon gitt ved integralet

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C ((2y^3 - 3y + xy^2)\,dx + (x - x^3 + x^2y)\,dy),$$

som ved Greens teorem er lik

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\partial_x(x - x^3 + x^2y) - \partial_y(2y^3 - 3y + xy^2)\right)\,dA \\
&= \iint_R \left((1 - 3x^2 + 2xy) - (6y^2 - 3 + 2xy)\right)\,dA \\
&= \iint_R \left(4 - 3x^2 - 6y^2\right)\,dA.
\end{aligned}$$

Vi ønsker at sirkulasjonen, og derfor dette dobbeltintegralet, skal være størst mulig. Dette oppnås ved å velge R til å være området der integranden er positiv, altså der $4 - 3x^2 - 6y^2 > 0$. Den største mulige sirkulasjonen får vi derfor når C er ellipsen som oppfyller $4 - 3x^2 - 6y^2 = 0$.