TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 12

Våren 2019

Løsningsforslag

16.1.2 Vi bruker formlene for diverergens og curl og får

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0,$$

og

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)\mathbf{k} = (0,0,0).$$

16.1.4 Divergensen til $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ er gitt ved

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = \partial_x(yz) + \partial_y(xz) + \partial_z(xy) = 0.$$

Curlen til feltet er gitt ved

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = (x-x)\mathbf{i} - (y-y)\mathbf{j} + (z-z)\mathbf{k} = (0,0,0).$$

16.1.7 Gitt $\mathbf{F} = (f(x), g(y), h(z))$ finn me at divergensen er

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(y)}{\partial y} + \frac{\partial h(z)}{\partial z} = f'(x) + g'(y) + h'(z),$$

medan curlen er

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial h(z)}{\partial y} - \frac{\partial g(y)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial z} - \frac{\partial h(z)}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g(y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x)}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= (0,0,0).\end{aligned}$$

16.1.9 Vi uttrykker først $\mathbf{F}$ i kartesiske koordinater. Siden $r = \sqrt{x^2+y^2}$ og $\sin(\theta) = y/r = y/\sqrt{x^2+y^2}$, får vi

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}.$$

Vi bruker igjen formlene for divergens og curl og finner

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2} - y^2/\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

og

$$\mathbf{curl\,F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathbf{k}$$
$$= -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\mathbf{k}.$$

En alternativ fremgangsmåte er å først vise at

$$\partial_x r = \cos(\theta), \qquad \partial_x \sin(\theta) = \frac{-\cos(\theta)\sin(\theta)}{r},$$
$$\partial_y r = \sin(\theta), \qquad \partial_y \sin(\theta) = \frac{\cos^2(\theta)}{r},$$

og deretter bruke disse direkte i derivasjonene. For eksempel blir divergensen

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r,\theta) = \partial_x\,(r) + \partial_y\,(\sin(\theta)) = \cos(\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{r},$$

som man kan sjekke stemmer overens med det vi fant i kartesiske koordinater. Curl regnes ut tilsvarende.

$\boxed{16.2.2}$ Dette følger av definisjonen av ∇, og produktregelen for derivasjon:

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi F_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi F_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi F_3)$$
$$= \frac{\partial \phi}{\partial x}F_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y}F_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z}F_3 + \phi\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$$
$$= \nabla\phi \cdot \mathbf{F} + \phi\nabla \cdot \mathbf{F}.$$

$\boxed{16.2.5}$ Per definisjon er

$$\nabla \times \nabla\phi = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{pmatrix}$$
$$= \left(\phi_{yx} - \phi_{xy}\right)\mathbf{i} - (\phi_{zx} - \phi_{xz})\,\mathbf{j} + \left(\phi_{yx} - \phi_{xy}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

der siste linje følger av likhet av blandede partiellderiverte (merk at skalarfeltet ϕ og dets blandende partiellderiverte er antatt kontinuerlige).

$\boxed{16.2.6}$ Vi har

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2)\mathbf{i} + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3)\mathbf{j} + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\mathbf{k}$$

og dermed er

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) =& (\partial_x\partial_y F_2 - \partial_y^2 F_1 - \partial_z^2 F_1 + \partial_x\partial_z F_3)\mathbf{i} \\
&+ (\partial_y\partial_z F_3 - \partial_z^2 F_2 - \partial_x^2 F_2 + \partial_x\partial_y F_1)\mathbf{j} \\
&+ (\partial_x\partial_z F_1 - \partial_x^2 F_3 - \partial_y^2 F_3 + \partial_y\partial_z F_2)\mathbf{k} \\
=& (\partial_x(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_1 - \partial_y^2 F_1 - \partial_z^2 F_1)\mathbf{i} \\
&+ (\partial_y(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_2 - \partial_y^2 F_2 - \partial_z^2 F_2)\mathbf{j} \\
&+ (\partial_z(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_3 - \partial_y^2 F_3 - \partial_z^2 F_3)\mathbf{k} \\
=& (\partial_x(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 F_1)\mathbf{i} + (\partial_y(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 F_2)\mathbf{j} + (\partial_z(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 F_3)\mathbf{k} \\
=& \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}.
\end{aligned}$$

Merk at vi la til og trakk fra $\partial_x^2 F_1 \mathbf{i}$, og tilsvarende $\partial_y^2 F_2 \mathbf{j}$ og $\partial_z^2 F_3 \mathbf{k}$ for de to andre komponentene, i linje 4--6.

$\boxed{16.2.10}$ Fra Teorem 3(i) i kapittel 16 i boken har vi at

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{F} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \\
&= \nabla(0) - \nabla \times \mathbf{0} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

som viser at komponentene til $\mathbf{F}$ er harmoniske. Siden $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ finnes det et (skalar)potensial φ slik at $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Denne funksjonen er også harmonisk, siden

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi &= \nabla \cdot (\nabla\varphi) \\
&= \nabla \cdot \mathbf{F} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{16.2.17}$ At $\mathbf{F}$ er et divergensfritt (solenoidal) vektorfelt svarer til at $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Vi verifiserer:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = e^{2z} + e^{2z} - 2e^{2z} = 0.$$

Siden $\mathbf{F}$ er divergensfritt finnes det et vektorpotensial $\mathbf{G}$ for $\mathbf{F}$, slik at $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$. Komponentene til dette potensialet må derfor oppfylle

$$\begin{aligned}
\partial_y G_3 - \partial_z G_2 &= xe^{2z}, && (1) \\
\partial_z G_1 - \partial_x G_3 &= ye^{2z}, && (2) \\
\partial_x G_2 - \partial_y G_1 &= -e^{2z}. && (3)
\end{aligned}$$

Potensialet $\mathbf{G}$ er ikke entydig, så vi kan ta oss noen friheter når vi finner et. La oss derfor anta at $G_3 = 0$. Ved å integrere de to første ligningene finner vi at

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{1}{2} ye^{2z} + f(x,y) \\
G_2 &= -\frac{1}{2} xe^{2z} + g(x,y).
\end{aligned}$$

Dermed impliserer den tredje ligningen at f og g må oppfylle

$$\partial_x f - \partial_y g = 0.$$

Vi kan like gjerne velge $f = g = 0$. Da ender vi opp med

$$\mathbf{G}(x, y) = \left(\frac{1}{2}ye^{2z}, -\frac{1}{2}xe^{2z}, 0\right).$$

som vektorpotensial for $\mathbf{F}$. Igjen understrekes det at $\mathbf{G}$ ikke er entydig.

$\boxed{16.3.1}$ La R være halv-disken innenfor $\mathcal{C}$. Da sier Green's teorem at

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \left((\sin(x) + 3y^2)\,dx + (2x - e^{-y^2})\,dy\right) &= \iint_R \left(\partial_x(2x - e^{-y^2}) - \partial_y(\sin(x) + 3y^2)\right) dA \\
&= \iint_R (2 - 6y)\,dA \\
&= 2\iint_R dA - 6\iint_R y\,dA \\
&= \pi a^2 - 6\iint_R y\,dA,
\end{aligned}$$

hvor vi på siste linje har benyttet at vi kjenner arealet til halv-disken. Siden

$$R = \left\{(x, y) : -a \le x \le a, 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\right\},$$

kan vi beregne det andre integralet ved hjelp av et iterert integral. Vi får

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \left((\sin(x) + 3y^2)\,dx + (2x - e^{-y^2})\,dy\right) &= \pi a^2 - 6\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx \\
&= \pi a^2 - 3\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx \\
&= \pi a^2 - 6(a^3 - \frac{1}{3}a^3) \\
&= \pi a^2 - 4a^3.
\end{aligned}$$

$\boxed{16.3.3}$ Me skal evaluera linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(x\sin(y^2) - y^2\right) dx + \left(x^2 y\cos(y^2) + 3x\right) dy, \qquad \text{(mot klokka)}$$

langs randa til trapeset R med hjørne i $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ og $(0, 2)$. Me mistenker at dette lettast kan gjerast ved bruk av Greens teorem,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\,dA.$$

I dette tilfellet har ein då $F_1(x, y) = x\sin(y^2) - y^2$, $F_2(x, y) = x^2 y\cos(y^2) + 3x$, og dermed $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy\cos(y^2) + 3$ og $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy\cos(y^2) - 2y$ sånn at integranden i dobbeltintegralet vert $3 + 2y$. Greens teorem gjev då

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(x\sin(y^2) - y^2\right) dx + \left(x^2 y\cos(y^2) + 3x\right) dy = 3\iint_R dA + 2\iint_R y\,dA.$$

Merk at trapeset R er symmetrisk om x-aksen og dermed vil det andre integralet på høgresida bli 0 fordi y er antisymmetrisk om x-aksen. Dermed står ein igjen med det første integralet på høgresida som berre er 3 gonger arealet av trapeset R som har parallelle sider med lengde 4 og 2 og høgde 1. Det vil seia at svaret er

$$3\iint_R dA = 3\cdot \text{areal}(R) = 3\cdot \frac{(4+2)1}{2} = 9.$$

$\boxed{16.3.4}$ Vi skal evaluere linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(x^2y\,dx - xy^2\,dy\right), \qquad \text{(med klokka)}$$

det vil si flyten av $\mathbf{F}(x,y) = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$ rundt $\mathcal{C}$, der $\mathcal{C}$ er randa av regionen

$$D: \quad x^2+y^2 \le 9, \qquad y \ge 0.$$

Green's Teorem sier at dette er det samme som å evaluere flateintegralet av z-komponenten til $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ over D, men der vi må gange med -1 siden $\mathcal{C}$ er orientert *med* klokka. Altså er

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \left(x^2y\,dx - xy^2\,dy\right) &= -\iint_D (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}A \\
&= \iint_D \left(y^2+x^2\right)\mathrm{d}A \\
&= \int_0^3\int_0^\pi r^2\,r d\theta\,dr \\
&= 81\pi/4.
\end{aligned}$$

$\boxed{16.3.5}$ Vi bruker resultatet uthevet i Eksempel 1, s. 926 i læreboka. For den gitte parametriseringen $\mathbf{r}(t) = a\cos^3(t) + b\sin^3(t)$, har vi

$$\begin{aligned}
x\,dy &= 3ab\cos^4(t)\sin^2(t)\,dt, \\
-y\,dx &= 3ab\sin^4(t)\cos^2(t)\,dt, \\
\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) &= \frac{3ab}{2}\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))\,dt = \frac{3ab}{2}\cos^2(t)\sin^2(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Alle disse tre uttrykkene, integrert fra $t=0$ til $t=2\pi$, gir arealet omsluttet av kurven. Da det siste uttrykket er enklest å integrere, velger vi dette.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} (x\,dy - y\,dx) \\
&= \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\sin^2(t)\,dt \\
&= \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt \\
&= \frac{3\pi ab}{8}.
\end{aligned}$$