

Anbefalte oppgaver uke 11

Våren 2019

Løsningsforslag

15.5.2 Kulen er grafen til

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a(\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi)), \quad 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= a(\cos(\phi) \cos(\theta), \cos(\phi) \sin(\theta), -\sin(\phi)) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= a(-\sin(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \cos(\theta), 0), \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos(\phi) \cos(\theta) & a \cos(\phi) \sin(\theta) & -a \sin(\phi) \\ -a \sin(\phi) \sin(\theta) & a \sin(\phi) \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2(\sin(\phi)^2 \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\phi)^2 \sin(\theta) \mathbf{j} + \cos(\phi) \sin(\phi) \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Vi finner så

$$\begin{aligned} dS &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| d\phi d\theta \\ &= a^2 \sqrt{\sin(\phi)^4 \cos(\theta)^2 + \sin(\phi)^4 \sin(\theta)^2 + \cos(\phi)^2 \sin(\phi)^2} d\phi d\theta \\ &= a^2 \sin(\phi) \sqrt{\sin(\phi)^2 (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + \cos(\phi)^2} d\phi d\theta \\ &= a^2 \sin(\phi) d\phi d\theta. \end{aligned}$$

15.5.4 Merk at kulen har radius $2a$ og at likningen for sylindringen kan skrives som

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2,$$

slik at denne har radius a og har akse som er parallell med z -aksen og krysser xy -planet i $(0, a)$. Dette er illustrert i Figur 1. Fordi vi arbeider på en kule er det nyttig å gå over til kulekoordinater. Da blir kulen

$$R = 2a,$$

og sylindringen blir

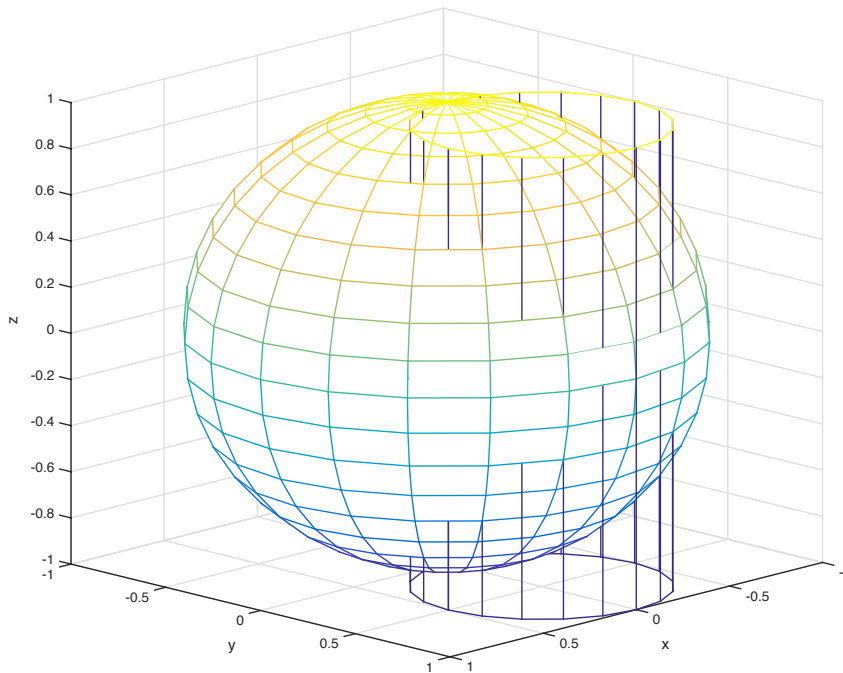
$$R^2 \sin(\phi)^2 \cos(\theta)^2 + R^2 \sin(\phi)^2 \sin(\theta)^2 = 2aR \sin(\phi) \sin(\theta),$$

eller

$$R \sin(\phi) = 2a \sin(\theta).$$

Innsiden av sylindringen oppfyller derfor ulikheten

$$R \sin(\phi) \leq 2a \sin(\theta),$$



Figur 1: Kulen og sylindren i oppgave 15.5.4, med $a = 1/2$.

og spesielt er dette ekvivalent med

$$\sin(\phi) \leq \sin(\theta)$$

på kulen. Hvis vi ytterligere begrenser oss til den delen av kulen som også ligger i første oktant er dette ekvivalent med ulikheten

$$\phi \leq \theta.$$

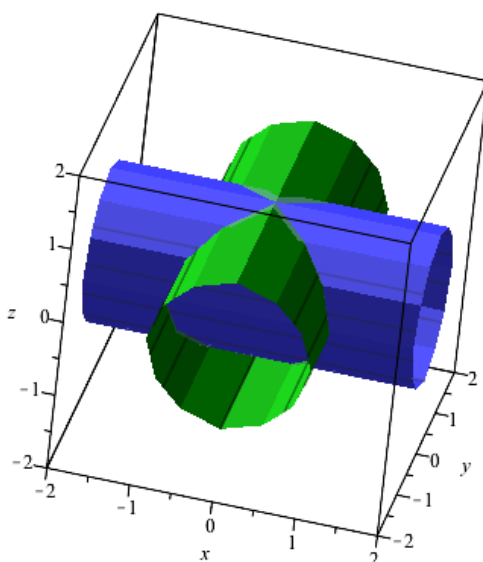
På grunn av symmetri må arealet til den delen av kulen som ligger innenfor sylindren være fire ganger arealet til den som i tillegg ligger i første oktant (se figuren). Det ønskede arealet blir nå

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\theta} (2a)^2 \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= 16a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(\theta)) \, d\theta \\ &= 8a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

15.5.10 Grunnet symmetri er delene av arealet på hver side av yz -planet like, så vi kan nøye oss med å beregne den delen av flaten som har positiv x -koordinat; se Figur 2. Kall denne delen \mathcal{S}_{x+} . \mathcal{S}_{x+} projisert ned på yz -planet er disken $D = \{(0, y, z) : y^2 + z^2 \leq a^2\}$, og er grafen av $x = \sqrt{a^2 - z^2}$

for $(y, z) \in D$. Vi bruker så formelen for arealet av en graf:

$$\begin{aligned} 2 \iint_{S_{x+}} dS &= 2 \iint_D \sqrt{1 + 0^2 + \frac{z^2}{a^2 - z^2}} dy dz \\ &= 2 \iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}} dy dz \\ &= 4 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - z^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}} dz \\ &= 8a^2. \end{aligned}$$



Figur 2: Situasjonen i oppgave 15.5.10 for $a = 1$. Oppgaven er å finne det grønne arealet inni den blå sylindren.

15.5.14 La E være projeksjonen ned i xy -planet. E består av de (x, y, z) som tilfredstiller

$$1 + y \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)},$$

eller

$$1 \geq x^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Vi bruker så formelen for arealelementet dS til en flate gitt av $z = f(x, y)$ til å skrive integralet som

$$\iint_S y dS = \iint_E y \sqrt{1 + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{3} \iint_E y dx dy.$$

Ved å gjøre variabelskiftet $x = r \cos \theta$, $(y - 1)/\sqrt{2} = r \sin \theta$, $dx dy = \sqrt{2}r dr d\theta$ ser vi at integralet til høyre kan skrives som

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \iint_E y dx dy &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + \sqrt{2}r \sin \theta) \sqrt{2}r d\theta dr \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}r d\theta dr = 2\pi\sqrt{6} \int_0^1 r dr = \pi\sqrt{6}.\end{aligned}$$

15.5.15 Vi finner først arealelementet. Siden $z = x^2$ beskriver løsningene til likningen

$$G(x, y, z) = x^2 - z = 0$$

har vi

$$\begin{aligned}dS &= \left| \frac{\nabla G}{G_z} \right| dx dy \\ &= \frac{\sqrt{(2x)^2 + 0^2 + (-1)^2}}{|-1|} dx dy \\ &= \sqrt{1 + 4x^2} dx dy.\end{aligned}$$

Paraboloiden skjærer flaten slik at skjæringskurven har projeksjon

$$x^2 = 1 - 3x^2 - y^2,$$

eller

$$4x^2 + y^2 = 1$$

i xy -planet. Likningen beskriver en ellipse. Vi må derfor integrere over

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - 4x^2}\}$$

siden vi befinner oss i første oktant. Vi finner

$$\begin{aligned}\iint_S xz dS &= \int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} x \cdot x^2 \cdot \sqrt{1+4x^2} dy dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1+4x^2} \sqrt{1-4x^2} dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1-16x^4} dx \\ &= \frac{1}{64} \int_0^1 \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{96},\end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 1 - 16x^4$.

15.5.22 Arealet av sfære-segmentet er $A = \frac{1}{8}4\pi a^2 = \pi a^2/2$. Ved symmetri er $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, så vi trenger bare å finne $M_{z=0}$. Siden sfære-segmentet er grafen til funksjonen

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D,$$

der D er den delen av disken gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$ som ligger i første kvadrant, bruker vi (nok en gang) formelen for arealet til flatesegmenter dS av en graf:

$$\begin{aligned} M_{z=0} &= \iint z \, dS \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy \\ &= \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy \\ &= \frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$

Altså er

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{A} = \frac{a}{2}.$$

15.6.1 Vi beregner fluksen ut av tetraederets fire sideflater. For sideflaten som tilfredstiller $x = 0$, har vi at $\mathbf{N} = (-1, 0, 0)$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = -x = 0$, så fluksen ut er 0. For sideflaten som tilfredstiller $z = 0$, har vi $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0$, så fluksen ut er 0. For sideflaten som tilfredstiller $y = 0$, har vi $\mathbf{N} = (0, -1, 0)$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = -z$. Fluksen ut av denne siden blir dermed

$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} (-z) \, dx \, dz = \int_0^2 (-6z + 3z^2) \, dz = -12 + 8 = -4.$$

For den skrå sideflaten S som ikke ligger i noe koordinatplan, benytter vi oss av det faktum at for en flate på formen $z = f(x, y)$, så er det oppadrettede flate-elementet $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dx \, dy$. I vårt tilfelle er $f(x, y) = 2 - x/3 - 2y/3$ og

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^{6-2y} (x, z, 0) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\right) dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y\right) dx \, dy \\ &= \int_0^3 \left(\frac{4}{3}(6-2y) + \frac{1}{18}(6-2y)^2 - \frac{4}{9}y(6-2y)\right) dy \\ &= 10. \end{aligned}$$

Den totale fluksen ut av tetraederet er altså $10 - 4 = 6$. Merk: Denne oppgaven kan også løses ved å bruke divergensteoremet. En observerer da at $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$ og at volumet av tetraederet er 6, så integralet blir $1 \cdot 6 = 6$.

15.6.6 Flaten er gitt ved $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, så det oppadrettede flate-elementet er

$$d\mathbf{S} = \mathbf{N} \, dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dx \, dy = (-2x, 2y, 1) dx \, dy.$$

La D være disken i xy -planet gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$. Fluksen opp gjennom flaten er

$$\begin{aligned} \iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (x, x, 1) \cdot (-2x, 2y, 1) dx \, dy \\ &= \iint_D (-2x^2 + 2xy + 1) dx \, dy \end{aligned}$$

Integralet av det andre leddet er 0 grunnet symmetri, og integralet av det siste leddet er lik arealet av D . Ved å skrive integralet av det første leddet i polarkoordinater, får vi at

$$\begin{aligned}\iint_D (-2x^2 + 2xy + 1) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r^2 \cos^2(\theta)) r dr d\theta + 0 + \pi a^2 \\ &= -\frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta + \pi a^2 \\ &= \pi a^2 \left(1 - \frac{a^2}{2}\right).\end{aligned}$$

15.6.12 Her må vi bruke den generelle formelen for flateelementet til en parametrisert flate. Flaten er gitt ved

$$\mathbf{r}(u, v) = (e^u \cos(v), e^u \sin(v), u), \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi.$$

Det oppadrettede flateelementet er gitt ved

$$\begin{aligned}d\mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \\ &= (e^u \cos(v), e^u \sin(v), 1) \times (-e^u \sin(v), e^u \cos(v), 0) du dv \\ &= (-e^u \cos(v), -e^u \sin(v), e^{2u}) du dv.\end{aligned}$$

Videre er

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) = (ue^u \sin(v), -ue^u \cos(v), e^{2u}).$$

Følgelig er fluksen

$$\begin{aligned}\iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^\pi (-ue^{2u} \sin(v) \cos(v) + ue^{2u} \sin(v) \cos(v) + e^{4u}) dv du \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi (e^{4u}) dv du \\ &= \frac{\pi}{4}(e^4 - 1).\end{aligned}$$

Review ex. 15.4 Planet beskriver løsningene til likningen

$$G(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0,$$

slik at arealelementet blir

$$\begin{aligned}dS &= \left| \frac{\nabla G}{G_z} \right| dx dy \\ &= \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{1} dx dy \\ &= \sqrt{3} dx dy.\end{aligned}$$

Vi må nå finne projeksjonen av flaten ned i xy -planet for å finne ut hva vi skal integrere over. (Det kan være til hjelp å lage en skisse her.) Setter vi $z = 0$ i likningen for planet finner vi

$$x + y = 1,$$

slik at projeksjonen ned i xy -planet er den rettvinklede trekanten begrenset av x - og y -aksen samt linjen $y = 1 - x$ for $0 \leq x \leq 1$. Vi kan nå regne ut integralet. Vi finner

$$\begin{aligned}\iint_S xyz \, dS &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y)\sqrt{3} \, dy \, dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x((1-x)y - y^2) \, dy \, dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left((1-x) \frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 x(1-x)^3 \, dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 (1-u)u^3 \, du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{40\sqrt{3}},\end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 1 - x$.