TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 10

Våren 2019

Løsningsforslag

$\boxed{15.1.3}$ Siden vektorfeltet er gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$ må feltlinjene tilfredstille differensiallikningen

$$y' = \frac{x}{y},$$

eller

$$\left(\frac{1}{2}y^2\right)' = x.$$

Ved å integrere denne likningen finner vi

$$y^2 - x^2 = c,$$

som beskriver hyperbler sentrert i origo. Det er tre ulike tilfeller å skille mellom: Hvis $c > 0$ ligger brennpunktene på y-aksen, mens de ligger på x-aksen når $c < 0$. Spesialtilfellet $c = 0$ svarer til de to linjene $y = \pm x$. Merk også at alle feltlinjene har disse to linjene som asymptoter. Se 1 for $c = \pm 1/4$ og $c = 0$.

Figur 1: Vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$ og utvalgte feltlinjer.

$\boxed{15.1.15}$ La $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ være strømlinjenes parametrisering. Vi krever

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(x,y),$$

eller

$$x'(t) = x^2 \qquad \text{og} \qquad y'(t) = -y,$$

som gir $y(t) = C_1 e^{-t}$ og $x(t) = \frac{1}{C_2 - t}$.

$\boxed{15.2.3}$ Siden

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

er vektorfeltet ikke konservativt.

$\boxed{15.2.5}$ Vi regner først ut de nødvendige partiellderiverte for å se om vektorfeltet oppfyller de nødvendige betingelsene for å være konservativt:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -2z; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2y; \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2y.$$

Fra dette ser vi at

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

De nødvendige betingelsene er altså oppfylt, og siden vi i dette tilfellet har at $\mathbf{F}$ er glatt og domenet er hele $\mathbb{R}^3$, vet vi at disse betingelsene også er tilstrekkelige for å si at vektorfeltet er konservativt.

Ved inspeksjon ser vi at

$$\phi(x,y,z) = x^2y + y^2z - z^2x,$$

er en mulig potensialfunksjon.

$\boxed{15.2.9}$ Vi søker en potensialfunksjon ϕ slik at

$$\nabla\phi(x,y,z) = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, -\frac{x^2+y^2}{z^2}\right). \tag{1}$$

La oss her betrakte domenet gitt av $z > 0$, slik at komponentene i vektorfeltet og deres partiell-deriverte alltid er veldefinerte. Første komponent i denne vektorligningen er $\phi_x(x,y,z) = 2x/z$, som gir

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{z} + C(y,z),$$

for en deriverbar funksjon C. Fra andre komponent av vektorligningen (1), følger det at

$$C_y(y,z) = \frac{2y}{z},$$

som betyr at $C(y,z) = \frac{y^2}{z} + K(z)$, for en deriverbar funksjon K. Vi har nå at $\phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + K(z)$. Ved å partiellderivere ϕ med hensyn på z får vi til slutt

$$-\frac{x^2+y^2}{z^2} + K'(z) = -\frac{x^2+y^2}{z^2},$$

hvilket betyr at K er en konstant. Vi konkluderer med at feltet er konservativt og har potensial-funksjonen

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + \text{konstant}.$$

For å finne ekvipotensialflatene setter vi potensialfunksjonen lik en konstant og ender opp med uttrykket

$$z = C(x^2+y^2),$$

som angir et sett med paraboloider. For å finne de tilhørende feltlinjene setter vi opp differensial-uttrykkene

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)},$$

som er ekvivalent med

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{2z\,dz}{x^2+y^2}.$$

Ved å integrere opp den første likheten finner vi

$$\ln|y| = \ln|x| + C_0,$$

eller

$$|y| = e^{C_0}|x| \Leftrightarrow |y| = \left|\pm e^{C_0}x\right| \Leftrightarrow y = Bx \text{ for } B \in \mathbb{R}.$$

Ved å bruke ovenstående sammenheng og ligningen for feltlinjene har vi da

$$2(1+B^2)x\,dx = -4z\,dz,$$

som gir

$$(1+B^2)x^2 = -2z^2 + A,$$

eller

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = A$$

for $A \in \mathbb{R}$. Altså er feltlinjene familien av skjæringskurver mellom ellipsoidene $x^2 + y^2 + 2z^2 = A$ og de vertikale planene $y = Bx$. Disse skjæringskurvene vil være ellipser.

15.3.2 Generelt har vi at

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right| dt.$$

Her er $f(\mathbf{r}(t)) = t$, og

$$\left|\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\right| = |\,\mathbf{r}'(t)| = |\,(2t, 1, 2t)\,| = \sqrt{1+8t^2}.$$

Dermed er integralet vi skal finne

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} y\,ds &= \int_0^m t\sqrt{1+8t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{24}\left[\left(1+8t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^m \\ &= \frac{1}{24}\left(\left(1+8m^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).\end{aligned}$$

15.3.11 Massen er gitt ved

$$\begin{aligned}M &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \delta(x,y,z)\,ds \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\,dt \\ &= 2\sqrt{2}\pi^2.\end{aligned}$$

Massesenteret er $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, der

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \int_0^{2\pi} \cos(t)t\sqrt{2}\,dt/M = 0, \\ \bar{y} &= \int_0^{2\pi} \sin(t)t\sqrt{2}\,dt/M = -1/\pi, \\ \bar{z} &= \int_0^{2\pi} t^2\sqrt{2}\,dt/M = 4\pi/3.\end{aligned}$$

(De to første integralene kan løses ved delvis integrasjon.)

15.3.15 Vi begynner med å parametrisere kurven.

$$(a\cos(t), a\sin(t), a\cos(t)), \qquad 0 \le t \le \pi/2,$$

som fremkommer ved først å parametrisere en sirkel om origo med radius a i xy--planet, og så sette $z = x$.

Vi får da

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} x\,ds &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2}\,dt \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{1 + \sin^2(t)}\,dt \\ &= a^2 \int_0^1 \sqrt{1 + v^2}\,dv,\end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $v = \sin(t)$. Substitusjonen $v = \sinh(p)$, samt identiteten $1 + \sinh^2(p) = \cosh^2(p)$, gir så

$$\begin{aligned}a^2 \int_0^1 \sqrt{1 + v^2}\,dv &= a^2 \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \cosh^2(p)\,dp \\ &= a^2 \left[\frac{1}{2}\cosh(x)\sinh(x) + \frac{1}{2}x\right]_0^{\sinh^{-1}(1)} \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2} + \sinh^{-1}(1)\right) \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right).\end{aligned}$$

$\boxed{15.4.6}$ De tre linjesegmentene kan parametriseres som

$$\begin{aligned}&(t, 0, 0), \qquad 0 \le t \le 1,\\ &(1, s, 0), \qquad 0 \le s \le 1,\\ &(1, 1, r), \qquad 0 \le r \le 1.\end{aligned}$$

Kall kurven bestående av disse tre linjesegmentene $\mathcal{C}$. Flyten av F langs $\mathcal{C}$ er da gitt ved

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (t, 0, -t) \cdot (1, 0, 0)\,dt \\ &+ \int_0^1 (1, s, -(1 + s)) \cdot (0, 1, 0)\,ds \\ &+ \int_0^1 (2, 1 - r, -2) \cdot (0, 0, 1)\,dr \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1.\end{aligned}$$

En alternativ løsning er å observere at feltet er konservativt,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\left(\frac{x^2 + y^2}{2} - xz - yz\right),$$

for så å ta differansen av verdiene til denne potensialfunksjonen i endepunktene av kurven beskrevet over.

15.4.17 Vi begynner med å velge en parametrisering av integrasjonskurven $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : &\quad (t, 0), &\quad -a \le t \le a; \\ \mathcal{C}_2 : &\quad (a\cos s, a\sin s), &\quad 0 \le s \le \pi. \end{aligned}$$

Merk at dette gir den korrekte orienteringen *mot klokka*. Begge integralene vi skal finne er nå summen av bidragene fra henholdsvis $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$.

a) Vi regner ut integralet direkte:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} x\,dy &= \int_{\mathcal{C}_1} x\,dy + \int_{\mathcal{C}_2} x\,dy \\ &= \int_{-a}^{a} t \cdot 0\,dt + \int_0^{\pi} a^2\cos^2 s\,ds \\ &= a^2\left[\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}\sin 2s\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

b) Tilsvarende har vi

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} y\,dx &= \int_{\mathcal{C}_1} y\,dx + \int_{\mathcal{C}_2} y\,dx \\ &= \int_{-a}^{a} 0\,dt - \int_0^{\pi} a^2\sin^2 s\,ds \\ &= -a^2\left[\frac{1}{2}s - \frac{1}{4}\sin 2s\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

Merk: Oppgave 15.4.20 hinter til hvorfor summen av disse integralene er 0.

Review Ex 15.8 Integralet I er uavhengig av valg av kurve mellom de to punktene dersom konstantene velges slik at feltet $\mathbf{F}$ er konservativt. I så fall er verdien av integralet differansen av verdiene til den tilhørende potensialfunksjonen i de to punktene.

Vi deriverer komponentene av $\mathbf{F}$ for å finne betingelser på a, b, og c:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial y} = ax + 3z, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 3y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x + 3z, \\ &\frac{\partial F_2}{\partial z} = 3x + by^2, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = by, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = bx + 3cy^2. \end{aligned}$$

Fra dette ser vi at

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

kun dersom $b = 3$, $a = 2$, og $c = 1$.

Vi har dermed funnet at

$$\mathbf{F} = \left(2xy + 3yz, x^2 + 3xz + 3y^2z, 3xy + y^3\right)$$

er konservativt. Ved inspeksjon ser vi at

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + 3xyz + y^3 z$$

er en mulig potensialfunksjon.

Kurveintegralet av tangentialkomponenten av $\mathbf{F}$ langs en vilkårlig kurve $\mathcal{C}$ med startpunkt $p_0 = (0, 1, -1)$ og sluttpunkt $p_1 = (2, 1, 1)$ blir dermed

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\,\mathbf{r} = \varphi(p_1) - \varphi(p_0) = 11 - (-1) = 12.$$