TMA4105 Matematikk 2

# Prøveeksamen

Våren 2019

## Oppgaver

$\boxed{1}$ La $T$ være området i $\mathbb{R}^3$ som ligger innenfor kuleflaten $x^2+y^2+z^2=4$, men utenfor sylinderen $x^2+y^2=1$.

Hvilket av de fire itererte integralene angir noe annet enn volumet av $T$?

$$(i)\quad \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_{1/\sin\varphi}^{2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$(ii)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$$

$$(iii)\quad 8\left(\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx-\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx\right)$$

$$(iv)\quad \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-r^2}} 2r\,dz\,dr\,d\theta$$

Merk at rekkefølgen på alternativene vil variere for hver enkelt kandidat.

$\boxed{2}$ Avgjør om grenseverdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$$

eksisterer.

$\boxed{3}$ La $f(x,y)=x^2(y+1)^3+y^2$.

Vis at $f$ har nøyaktig ett kritisk punkt og at dette er et lokalt minimumspunkt.

Har $f$ en største og en minste verdi?

$\boxed{4}$ Bruk Greens teorem til å finne arealet av området i $xy$-planet som er begrenset av kurven

$$\mathbf{r}(t)=(t-\cos t,1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi,$$

og $x$-aksen.

$\boxed{5}$ Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

der

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(yz+e^{x^2},xyz,xy+\cos^3 z\right)$$

og $\mathcal{C}$ er skjæringskurven mellom paraboloiden $z=x^2+y^2$ og planet $z=2x-4y+4$ orientert mot klokken sett ovenfra.