TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 14

Våren 2019

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom de to paraboloidene gitt ved $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathcal{C}$ være orientert mot klokken sett ovenfra.

Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} (x+y)\,dx + (y-x)\,dy + (x^2+y^2)\,dz.$$

$\boxed{2}$ Anta at $\mathcal{S}_1$ og $\mathcal{S}_2$ er to orienterte flater med samme rand $\mathcal{C}$, der orienteringen av $\mathcal{S}_1$ og orienteringen av $\mathcal{S}_2$ begge induserer samme orientering av $\mathcal{C}$.

Vil

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS$$

for alle glatte vektorfelt **F** definert på en åpen mengde som inneholder både $\mathcal{S}_1$ og $\mathcal{S}_2$, der enhetsnormalene $\widehat{\mathbf{N}}$ samsvarer med den induserte orienteringen av $\mathcal{C}$?

$\boxed{\text{U}}$ Sirkulasjonen til et elektrisk felt langs en enkel, lukket kurve $\mathcal{C}$ svarer til endringen i den magnetiske fluksen,

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS,$$

gjennom enhver orientert flate $\mathcal{S}$ med rand $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$, beskrevet ved

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}.$$

Vis at

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Dette kalles *Faradays lov* (på differensialform) og er en av *Maxwells ligninger*.

Maple T.A.-oppgaver

$\boxed{1}$ La kurven $\mathcal{C}$ være trekanten med hjørner i $(4,0,0)$, $(0,4,0)$ og $(0,0,5)$. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{15}{64}xy\,dx + \frac{3}{16}yz\,dy + \frac{3}{20}xz\,dz,$$

der $\mathcal{C}$ er orientert med klokken sett fra punktet $(5,5,5)$.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{S}$ være den delen av flaten $x^2+y^2+3(z-1)^2 = 9$ hvor $z \geq 0$. Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xz - 9y^3\cos z, 9x^3e^z, 7xyze^{x^2+y^2+z^2}), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker vekk fra origo.