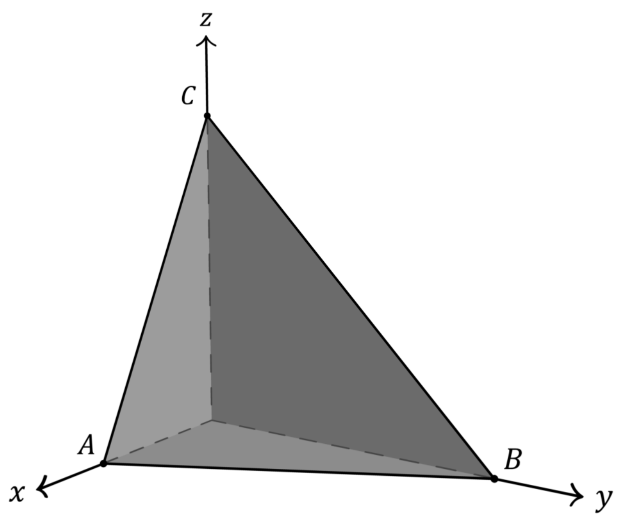
TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 13

Våren 2019

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av tetraederet med hjørner i $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$, $C = (0,0,2)$ og $(0,0,0)$.



Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3xz + xy, x^2 + yz, z^2 - yz), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

regn ut

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der ∂T er randen til T og $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut av T.

$\boxed{2}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{for} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0),$$

så er div $\mathbf{F}(x,y,z) = 0$.

La $\mathcal{S}_R$ være kuleflaten med sentrum i $(0,0,0)$ og radius R. Det kan vises at

$$\oiint_{\mathcal{S}_R} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = 4\pi,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker ut av kulen.

Forklar hva som er galt med følgende utsagn: «Bruker vi divergensteoremet på kulen B_R, der $\mathcal{S}_R = \partial B_R$, så er

$$\oiint_{\mathcal{S}_R} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{B_R} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 0.»$$

$\boxed{\text{U}}$ Et resultat i elektromagnetisme sier at det elektriske feltet skapt av en punktladning q plassert i $(0,0,0)$ er gitt ved

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

der ϵ_0 er en fysisk konstant kalt vakuumets permittivitet.

Vis at

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

for alle lukkede flater $\mathcal{S}$ som omslutter $(0,0,0)$ og der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker vekk fra $(0,0,0)$. Dette kalles *Gauss' lov* og er den første av *Maxwells ligninger*.

Maple T.A.-oppgaver

$\boxed{1}$ La D være området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av flatene $z = \sqrt{x^2+y^2-8}$, $z=0$ og $z=4$.

Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x-z, y+x, z+2), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS,$$

der $\mathcal{S}$ er den krumme delen av randen til T og $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ med positiv z-komponent.

$\boxed{2}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (8x+8x^3z, -2y(x^2+z^2), -(12x^2z^2+8y^2z)), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

finn området T i $\mathbb{R}^3$ slik at

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS$$

er størst mulig, der ∂T er randen til T og $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut av T.