TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 10

Våren 2019

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ La vektorfeltet **F** være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (6y, 6x, 8z^2)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a) Vis at **F** er et konservativt vektorfelt og finn en potensialfunksjon φ.

b) La $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ der $0 \le t \le \pi$. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

c) Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$$

der vektorfeltet **H** er gitt ved $\mathbf{H}(x, y, z) = (0, x, 0)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

d) Bruk resultatene ovenfor til å regne ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

der vektorfeltet **G** er gitt ved $\mathbf{G}(x, y, z) = (6y, 5x, 8z^2)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{2}$ La det konservative vektorfeltet **F** være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{xy}(y\cos(xz) - z\sin(xz)), xe^{xy}\cos(xz), 1 - xe^{xy}\sin(xz)\right), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathcal{C}$ er kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 6\sin^2 t, 5t)$$

der $0 \le t \le 2\pi$.

$\boxed{\text{U}}$ La $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ være samme kurve i $\mathbb{R}^3$, men gjennomløpt hver sin vei, og la **F** være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$. Vis at

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Maple T.A.-oppgaver

$\boxed{1}$ En tråd ligger langs kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

der $0 \le t \le 2\pi$. Hva er trådens masse hvis dens massetetthet er gitt ved $\delta(x, y, z) = z$?

$\boxed{2}$ La vektorfeltet **F** være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (11z, 4y, 2x)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Regn ut integralet

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der kurven Γ er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ for $0 \le t \le 2$.