

Anbefalte oppgaver uke 9

Våren 2019

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 9. utg. Det er de samme oppgavenummerene som i 8. utgave.

Oppgaver til plenumsregning

14.5.28 Regn ut

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_y^1 \frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)} dz dy dx$$

ved å endre integrasjonsrekkefølgen.

Eks. S2017, Oppgave 6 La T være området i rommet som ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og mellom $z = 0$ og $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$. Regn ut

$$\iiint_T 3e^z \sqrt{x^2 + y^2} dV.$$

14.4.29 La oss se på ellipsoiden E gitt med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad (1)$$

der $a, b, c > 0$ er vilkårlige. Skriv ligningen for E som $z = \pm f(x, y)$. Bruk symmetri og regn ut et dobbeltintegral for å finne volumet til E . Regn deretter ut volumet til E direkte ved å bruke forandring av variabler for et trippeltintegral. Sammenlign resultatet med den kjente formelen for volumet av en kule med radius r gitt med $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Oppgaver med løsningsforslag

14.5.7 Evaluér trippelintegralet

$$\iiint_R (xy + z^2) dV$$

over området $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$. *Tips:* Symmetri kan forenkle utregningen.

14.5.15 Finn verdien av $\iiint_T x dV$, hvor T er tetrahederet begrenset av planene $x = 1, y = 1, z = 1$ og $x + y + z = 2$.

14.6.7 Benytt variabelskifte til å finne volumet av området som ligger i første oktant, er begrenset av planene $y = 0$ og $y = x$ og ligger inni ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

14.6.10 La R utgjøre cylinderen definert av $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ og $0 \leq z \leq h$ og regn ut

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

14.6.15 Finn verdien av $\iiint_R z dV$, der $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$.

14.6.16 La T være området som ligger i den delen av halvkula $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ som ligger i første oktant. Regn ut

$$\iiint_T x dV \quad \text{og} \quad \iiint_T z dV.$$

14.7.13 Finn massen til en sfærisk planet med radius a der massetettheten i en avstand R fra planetens sentrum er gitt som $\rho = A/(B + R^2)$.

14.7.18 Hva er massesenteret til en kube $0 \leq x, y, z \leq a$ med tetthet $\rho = x^2 + y^2 + z^2$?
(*Tips: Symmetri.*)

14.7.20 Finn tyngdepunktet (sentroiden) til det ubegrensede området $0 \leq z \leq e^{-(x^2+y^2)}$.