TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 8

Våren 2019

Nummererte oppgaver er hentet fra kapittel 14 i Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 9. utg. Oppgavene har samme oppgavenummer som i 8. utg. Format: delkapittel.oppgavenr

Oppgaver til plenumsregning

Eks. S10, oppg. 3 Et dobbeltintegral blir ved iterert integrasjon lik

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{y(1+x^2)}} = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{y(1+x^2)}}\, dx \right) dy.$$

1. Skissér området D, og beregn integralet I ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.
2. Betrakt variabelskiftet $x = u$, $y = u^2 v$. Vis at D transformeres til kvadratet R gitt ved $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ under denne transformasjonen.
3. Regn ut integralet I ved å bruke substitusjonen fra 2.

5.12 Beregn tripelintegralet

$$\iiint_R \cos(x)\cos(y)\cos(x)\, dV,$$

hvor R er området begrenset av ulikhetene $x, y, z \geq 0$ og $x + y + z \leq \pi$.

Eks. S07, oppg. 3 La $a > 0$ være en gitt konstant. Beregn dobbeltintegralet

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dydx,$$

ved å bytte til polarkordinater.

Oppgaver med løsningsforslag

La $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ være disken om origo med radius $a > 0$. Beregn integralene

4.2 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA$;

4.6 $\iint_D x^2y^2\, dA$.

La $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0 \text{ og } x^2 + y^2 \leq a^2\}$ utgjøre kvartdisken om origo i første kvadrant med radius $a > 0$. Beregn følgende integral:

$\boxed{4.7}$ $\iint_Q y\,dA;$ $\boxed{4.10}$ $\iint_Q \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dA.$

$\boxed{4.18}$ Avgjør for hvilke verdier av k integralet

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dA}{(x^2+y^2)^k}$$

konvergerer, og finn i disse tilfellene integralets verdi.

$\boxed{\text{Eks. V16, oppg. 7}}$ La D vere området i første kvadrant (det vil seie, $x \geq 0$ og $y \geq 0$) som er avgrensa av ellipsane $4x^2+y^2=16$ og $4x^2+y^2=1$. Skissér området D og rekn ut

$$\iint_D \frac{x}{4x^2+y^2}\,dA.$$