TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 13

Våren 2019

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 9. utg. Oppgavene har samme oppgavenummer som i 8. utgave.

Oppgaver til plenumsregning

Eks. V07, oppg. 2 La f vere funksjonen gitt ved

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

a) Finn eventuelle kritiske punkt for $f(x,y)$.

Finn absolutt maksimum og minimum for $f(x,y)$ på området gitt ved $x^2+y^2 \leq 9$.

b) For $r > 0$, la A_r vere området gitt ved $x^2+y^2 \leq r^2$.

For kvar $r > 0$, finn maksimum og minimum for $f(x,y)$ på A_r.

Avgjer om $f(x,y)$ har absolutt maksimum og /eller absolutt minimum i $\mathbb{R}^2$, og bestem desse dersom dei finnest.

Eks. V08, oppg. 5 Kurven $\mathcal{C}$ er gitt i polarkoordinater ved

$$\mathcal{C}: \qquad r(\theta) = \frac{3}{2} + \cos\theta \quad \text{for} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y)$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy - 2y)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + y\right)\mathbf{j}. \tag{1}$$

a) Finn arealet av området innenfor kurven $\mathcal{C}$.

b) Finn verdien av integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds$$

når $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken.

c) Finn fluksen av $\mathbf{F}$ over $\mathcal{C}$ i retning $\mathbf{n}$, der $\mathbf{n}$ er den enhetsnormalen til $\mathcal{C}$ som peker vekk fra origo.

Eks. S18, oppg. 2 En kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2+\sqrt{2}\cos(t), 1-\sin(t), 3+\sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finn enhetstangentvektoren $\widehat{\mathbf{T}}(t)$ og enhetsnormalvektoren $\widehat{\mathbf{N}}(t)$ for et vilkårlig punkt på kurven. Bestem krumningen $\kappa(t)$ i et vilkårlig punkt på kurven.

Eks. V14, oppg. 6 La $\mathbf{F}$ denotere vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y, (3y^2 - 1)z)$ definert på hele $\mathbb{R}^3$.

a) Finn divergensen til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

b) Regn ut fluksen av $\mathbf{F}$ gjennom den delen av flaten $z = \ln(2 - (x^2 + y^2)^2)$ som ligger over xy-planet.

Oppgaver med løsningsforslag

16.3.6 Vis at Greens teorem følger fra divergensteoremet i planet. *Hint:* Reversér beviset til teorem 7.

16.3.7 Skissér den plane kurven $\mathcal{C}$ gitt ved $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \sin(2t)\mathbf{j}$, der $0 \leq t \leq 2\pi$, og regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

for vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = ye^{x^2}\mathbf{i} + x^3e^y\mathbf{j}$.

Review ex. 16.3 Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(3y^2 + 2xe^{y^2}\right) dx + 2x^2ye^{y^2}\, dy,$$

hvor $\mathcal{C}$ er randen til parallellogrammet med hjørnepunkt $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$ og $(1, 1)$, med omløpsretning mot klokka.

Review ex. 16.10 Rundt hvilken enkel og lukket kurve i xy-planet har vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(2y^3 - 3y + xy^2\right)\mathbf{i} + \left(x - x^3 + x^2y\right)\mathbf{j}$$

størst sirkulasjon?