TMA4105 Matematikk 2

# Anbefalte oppgaver uke 12

Våren 2019

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 9. utg. Oppgavene har samme oppgavenummer som i 8. utgave.

## Oppgaver til plenumsregning

Eks. S16, oppg. 7 La $\mathcal{C}$ være randen til firkanten med hjørner i $(-2,1)$, $(-2,-3)$, $(1,0)$ og $(1,7)$, der $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} xy\,dx + 2x\,dy$$

ved å bruke Greens theorem.

Eks. V13, oppg. 6

**a)** Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} \quad \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

er curlfritt (det vil si, curl $\mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{k} = 0$ for alle $(x,y) \neq (0,0)$).

**b)** La $\mathcal{C}$ være kurven i $xy$-planet som starter i $(1,0)$ og gjennomløper sirkelen $x^2+y^2=1$ nøyaktig én gang. Anta at $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds,$$

og avgjør om $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt. Begrunn svaret.

Eks. V12, oppg. 5

**a)** Ligningen $4x^2 + 24x + 9y^2 = 0$ beskriver en ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengden til store og lille halvakse, og skissér ellipsen.

**b)** Den rette linja $y = -2x/\sqrt{3}$ deler ellipsen i to deler. La $\mathcal{C}$ være den korteste av disse to delene, orientert fra høyre mot venstre. Finn

$$\int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy.$$

(*Hint:* Parametriseringen $x = 3\cos t - 3$, $y = 2\sin t$ kan brukes.)

**c)** Regn ut arealet avgrensa av $\mathcal{C}$ og linja $y = -2x/\sqrt{3}$. (*Hint:* Greens teorem.)

$\boxed{\text{Bonusoppgave}}$ La $\mathcal{C}_\epsilon$ være sirkelen $x^2 + y^2 = \epsilon^2$, orientert mot klokken, og la vektorfeltet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \, .$$

## Oppgaver med løsningsforslag

Regn ut div $\mathbf{F}$ og curl $\mathbf{F}$ for følgende vektorfelt:

$\boxed{16.1.2}$ $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

$\boxed{16.1.4}$ $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

$\boxed{16.1.7}$ $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$.

$\boxed{16.1.9}$ $\mathbf{F}(r, \theta) = r\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$,
hvor $(r, \theta)$ er polarkoordinater i planet.

Bevis identitetene

$\boxed{16.2.2}$ $\nabla \bullet (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \bullet \mathbf{F} + \phi(\nabla \bullet \mathbf{F})$.

$\boxed{16.2.5}$ $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$.

$\boxed{16.2.6}$ $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$.

$\boxed{16.2.10}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}$ på $\mathbb{R}^3$ være både rotasjonsfritt og solenoidalt. Vis at de tre komponentene til $\mathbf{F}$ samt skalarpotensialet til $\mathbf{F}$ utgjør harmoniske funksjoner i $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{16.2.17}$ Vis at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathrm{e}^{2z}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

er et solenoidalt vektorfelt og finn deretter en tilhørende potensialfunksjon.

$\boxed{16.3.1}$ Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(\sin x + 3y^2\right) dx + \left(2x - \mathrm{e}^{-y^2}\right) dy,$$

hvor $\mathcal{C}$ er randen til halvdisken $x^2 + y^2 \leq a^2$ med $y \geq 0$, orientert mot klokka.

$\boxed{16.3.3}$ Finn verdien av

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(x\sin(y^2) - y^2\right) dx + \left(x^2 y\cos(y^2) + 3x\right) dy,$$

der $\mathcal{C}$ er randen til trapeset med hjørnepunkt $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ og $(0, 2)$, orientert mot klokka.

$\boxed{16.3.4}$ La $\mathcal{C}$ utgjøre randen til området i planet definert av $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$, orientert mot klokka. Evaluér

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 y \, dx - xy^2 \, dy.$$

$\boxed{16.3.5}$ Benytt et linjeintegral til å finne arealet (i planet) som omkranses av kurven

$$\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + b\sin^3 t\,\mathbf{j} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$