TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 11

Våren 2019

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 9. utg. Alle oppgavene har samme oppgavenummer som i 8. utgave.

Oppgaver til plenumsregning

15.5.17 Finn den totale ladningen på den parametriserte flata gitt ved

$$\mathbf{r}(u,v) = e^u \cos v\mathbf{i} + e^u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \qquad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le \pi,$$

dersom ladningstettheten på flata er $\delta(u,v) = \sqrt{1+e^{2u}}$.

Eks. S09, oppg. 4 La $\mathcal{S}$ være den delen av flata

$$z = \ln\left(x^2+y^2\right)$$

som ligger i første oktant, under planet $z = 2$. Beregn arealet av $\mathcal{S}$.

Eks. V09, oppg. 5 La $\mathcal{S}$ være den delen av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger over planet $2x + z = 1$. Vi orienterer $\mathcal{S}$ ved å velge enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ slik at den peker oppover (med andre ord: $\hat{\mathbf{N}}$ skal ha positiv z-komponent). Finn fluksen gjennom $\mathcal{S}$ av vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{k}$, det vil si regn ut integralet

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Oppgaver med løsningsforslag

15.5.2 Verifisér at det (infinitesimale) flateelementet på en kuleflate $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ er gitt som

$$dS = a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

i kulekoordinater.

15.5.4 Finn arealet til den delen av kuleflata $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ som ligger inni sylinderen $x^2 + y^2 = 2ay$.

15.5.10 Finn arealet til den delen av sylinderen $x^2 + z^2 = a^2$ som ligger inni sylinderen $y^2 + z^2 = a^2$.

15.5.14 Beregn $\iint_{\mathcal{S}} y\, dS$, hvor $\mathcal{S}$ er den delen av kjegla $z = \sqrt{2(x^2+y^2)}$som ligger nedenfor planet $z = 1 + y$.

15.5.15 La $\mathcal{S}$ utgjøre den delen av flata $z = x^2$ som ligger i første oktant (i $\mathbb{R}^3$) og inni paraboloiden $z = 1 - 3x^2 - y^2$. Finn $\iint_{\mathcal{S}} xz\, dS$.

$\boxed{15.5.22}$ Et kuleskall med radius a er sentrert i origo. Finn massesenteret (sentroiden) til den delen av sfæra som ligger i første oktant.

$\boxed{15.6.1}$ Regn ut fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j}$ ut av tetraederet begrenset av koordinatplanene samt planet $x + 2y + 3z = 6$.

$\boxed{15.6.6}$ Finn fluksen til vektorfeltet $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ opp gjennom den delen av flata $z = x^2 - y^2$ som ligger inni sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$.

$\boxed{15.6.12}$ Beregn fluksen til $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ opp gjennom flata

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathrm{e}^u \cos v\mathbf{i} + \mathrm{e}^u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \qquad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

$\boxed{\text{Review ex. 15.4}}$ La $\mathcal{S}$ være den delen av planet $x + y + z = 1$ som ligger i første oktant. Finn $\iint_{\mathcal{S}} xyz\, dS$.