

Anbefalte oppgaver uke 10

Våren 2019

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 9. utg. Alle oppgavene har samme oppgavenummer som ved 8. utgave.

Oppgaver til plenumsregning

Eks. S16, oppg. 7 La \mathcal{C} være randen til firkanten med hjørner i $(-2, 1)$, $(-2, -3)$, $(1, 0)$ og $(1, 7)$, der \mathcal{C} er orientert mot urviseren. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} xy \, dx + 2x \, dy.$$

Eks. V16, oppg. 4 Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{x}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{y}{x^2 + y^2} \, dy,$$

der \mathcal{C} er kurva gitt ved $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ for $0 \leq t \leq 2\pi$.

Eks. V11, oppg. 6 Vi er gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xye^{x^2} \mathbf{i} + e^{x^2} \mathbf{j} + 2z \mathbf{k} = (2xye^{x^2}, e^{x^2}, 2z).$$

a) Avgjør om \mathbf{F} er et konservativt vektorfelt.

b) Finn verdien av linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

når \mathcal{C} er romkurva med parameterfremstilling $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, hvor $0 \leq t \leq \pi$.

Oppgaver med løsningsforslag

15.1.3 Skissér vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ i planet og bestem dets feltlinjer.

15.1.15 Beskriv strømlinjene til hastighetsfeltet $\mathbf{v}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

Avgjør om følgende to vektorfelt er konservative, og hvis ja, finn tilhørende potensialfunksjon(er).

15.2.3 $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$

15.2.5 $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}.$

15.2.9 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\mathbf{k}$$

er konservativt og finn dets potensialfunksjon. Beskriv ekvipotensialflatene og finn feltlinjene.

15.3.2 Regn ut $\int_{\mathcal{C}} y \, ds$ hvor \mathcal{C} er gitt ved $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, der $0 \leq t \leq m$.

15.3.11 La \mathcal{M} være en metalltråd i rommet formet som en sirkulær heliks (skruelinje) $x = \cos t$, $y = \sin t$ og $z = t$, der $0 \leq t \leq 2\pi$, med massetetthet $\delta(x, y, z) = z$. Finn massen og massesenteret til \mathcal{M} .

15.3.15 La \mathcal{C} være den delen av skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ som ligger i først oktant. Regn ut $\int_{\mathcal{C}} x \, ds$.

15.4.6 Regn ut flyten (kurveintegralet over tangentialkomponenten) av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$$

langs kurven \mathcal{C} gitt ved linjesegmentene $(0, 0, 0)$ til $(1, 0, 0)$ til $(1, 1, 0)$ til $(1, 1, 1)$.

15.4.17 Regn ut de lukkede kurveintegralene

a) $\oint_{\mathcal{C}} x \, dy;$

b) $\oint_{\mathcal{C}} y \, dx$

langs \mathcal{C} gitt ved randen av den øvre halvdissen $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, orientert mot klokka.

Review ex. 15.8 La \mathcal{C} være en vilkårlig kurve som starter i $(0, 1, -1)$ og slutter i $(2, 1, 1)$. For hvilke verdier av a , b og c kan du fastslå verdien av flyten

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (axy + 3yz)\mathbf{i} + (x^2 + 3xz + by^2z)\mathbf{j} + (bxy + cy^3)\mathbf{k}$ uten å vite noe nærmere om \mathcal{C} ? Hva blir verdien av integralet?