

Anbefalte oppgaver uke 14

Våren 2019

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 9. utg. Oppgavene har samme oppgavenummer som i 8. utgave.

Oppgaver til plenumsregning

Eks. S06, oppg. 4 La T være det romlige området gitt i sylinderkoordinater ved

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 2$$

og la S være overflaten til T . La videre

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^3)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - y^3)\mathbf{k}.$$

- a) Finn fluksen $\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$ ut igjennom den krumme delen S' av flaten S .
 b) Finn fluksen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$ ut igjennom S .

Eks. S18, oppg. 1 og 3 Dette er repetisjonsoppgaver fra tidligere deler av pensumet.

- a) Finn en ligning for tangentplanet til flaten gitt ved

$$4(x + 1)^2 + 6(y - 1)^2 + x^2(z - 2)^2 = 16$$

i punktet $(1/2, 2, 0)$.

- b) Finn største verdien til funksjonen $f(x, y) = e^{xy}$ på kurven $x^3 + y^3 = 16$, der (x, y) ligger i 1. kvadrant.

Eks. S12, oppg. 6 Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$.

- a) Finn volumet til T .

La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . La videre \mathbf{F} være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}.$$

- b) Regn ut $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$.
 c) Regn ut $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$.

Oppgaver med løsningsforslag

16.4.4 Bruk divergensteoremet til å finne fluksen av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + 3yz^2 \mathbf{j} + (3y^2z + x^2) \mathbf{k}$$

ut av kuleskallet S gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, hvor $a > 0$.

16.4.5 Regn ut fluksen av $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ ut av kula $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 \leq 9$.

16.4.12 Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + xz) \mathbf{i} + (y + yz) \mathbf{j} - (2x + z^2) \mathbf{k}$ oppover gjennom den delen av kuleskallet $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ som ligger i 1. oktant.

16.4.29 Benytt divergensteoremet på vektorfeltet $\mathbf{F} = \phi \mathbf{c}$, where \mathbf{c} er en vilkårlig konstant vektor, til å vise at

$$\iiint_D \nabla \phi \, dV = \iint_S \phi \hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

16.5.1 Regn ut

$$\oint_C xy \, dx + yz \, dy + zx \, dz$$

rundt trekanten C med hjørnepunkt $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$, orientert med klokka sett fra punktet $(1, 1, 1)$.

16.5.2 Evaluer

$$\oint_C y \, dx - x \, dy + z^2 \, dz$$

rundt skjæringskurven C til sylindrene $z = y^2$ og $x^2 + y^2 = 4$, orientert mot klokka sett fra et punkt høyt oppe på z -aksen.

16.5.3 La S være halvkula $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ hvor $z \geq 0$, med utadrettet enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$, og la

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 3y \mathbf{i} - 2xz \mathbf{j} + (x^2 - y^2) \mathbf{k}.$$

Regn ut

$$\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

16.5.5 Bruk Stokes' teorem til å vise at

$$\oint_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = \sqrt{3} \pi a^2,$$

hvor C er skjæringskurven mellom flatene $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ og $x + y + z = 0$, med passende orientering.

16.5.10 La C være kurven definert av $(x - 1)^2 + 4y^2 = 16$ og $2x + y + z = 3$, orientert mot klokka sett fra et punkt høyt oppe på z -aksen, og la

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + y^2 + \sin x^2) \mathbf{i} + (2xy + z) \mathbf{j} + (xz + 2yz) \mathbf{k}.$$

Regn ut $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.