NØKKELBEGREPER — UKE 5

- Kjerneregel for funksjoner av flere variabler
- Lineær approkismasjon
- Deriverbarhet for funksjoner av flere variabler
- Gradient og retningsderivert
- Implisitt funksjonsteorem

KJERNEREGLER

Hvis z er en funksjon av x og y med kontinuerlig første ordens partiellderiverte, og x og y er deriverbare funksjoner av t, så er

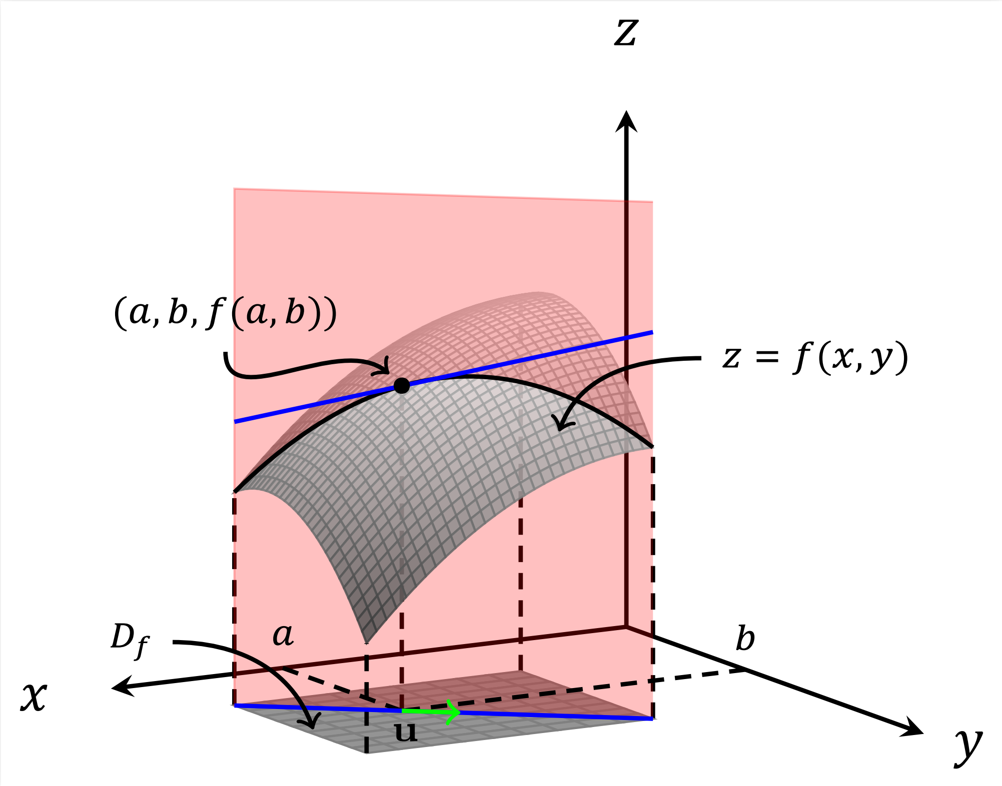
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Hvis z er en funksjon av x og y med kontinuerlig første ordens partiellderiverte, og x og y avhenger av r og s, så er

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

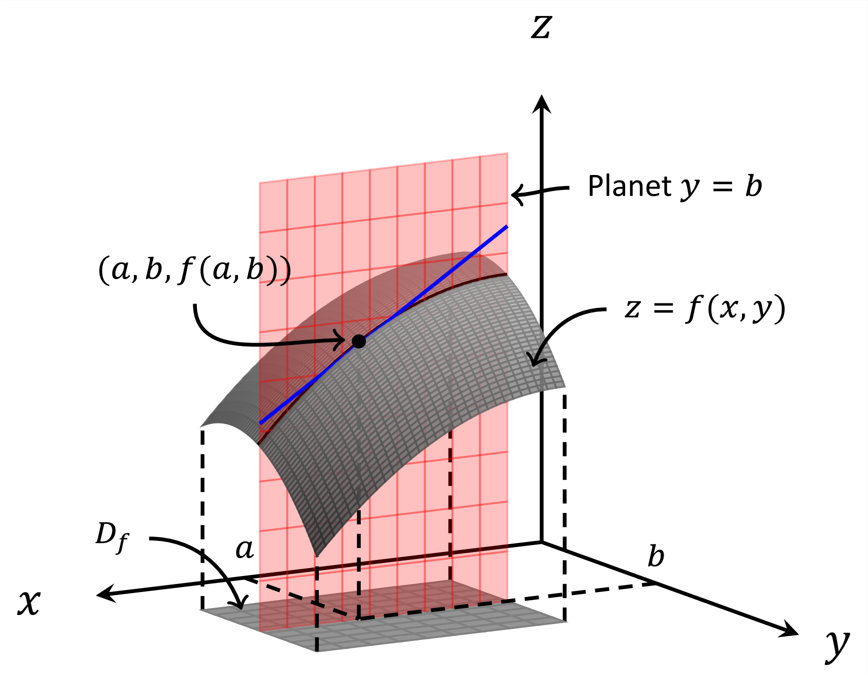
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

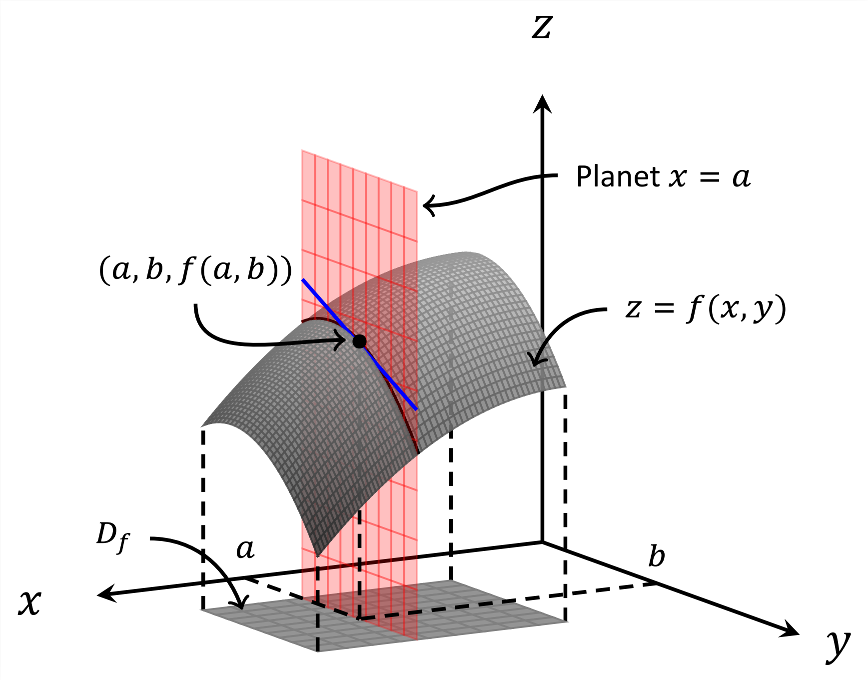
RETNINGSDERIVERT



$$D_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

PARTIELLDERIVASJON





$$D_{\mathbf{i}} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$D_{\mathbf{j}} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

IMPLISITT FUNKSJONSTEOREM

Anta at D er en åpen delmengde av $\mathbb{R}^{n+1}$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}$ være en funksjon av $n+1$ variable, $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, med kontinuerlig partiellderiverte. Anta at $(\mathbf{a}, b) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ er et punkt i D der $f(\mathbf{a}, b) = 0$.

Anta at $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$. Da finnes det en omegn B om $\mathbf{a}$ slik at for hver $\mathbf{x}$ i B finnes det et entydig bestemt tall $g(\mathbf{x})$ slik at

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

Funksjonen $g\colon B \to \mathbb{R}$ er deriverbar og

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}.$$

Spesielt er $g(\mathbf{a}) = b$ og

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b)}.$$