TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 5

Våren 2018

Løsningsforslag

$\boxed{12.5.2}$ Vi ønsker å partiellderivere $w = f(x, y, z)$ med hensyn på t, når $x = g(s)$, $y = h(s,t)$, og $z = k(t)$. Generelt har vi fra kjerneregelen

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

I dette tilfellet er $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$ og $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dk}{dt}$. Vi setter inn dette, og oppnår

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt}.$$

$\boxed{12.5.4}$ Vi lar

$$w = f(x,y) \qquad x = g(r,s) \qquad y = h(r,t) \qquad r = k(s,t) \qquad s = m(t).$$

Da blir

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\frac{dm}{dt} + \frac{\partial k}{\partial t}\right) + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{dm}{dt}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial r}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\frac{dm}{dt} + \frac{\partial k}{\partial t}\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\right).$$

$\boxed{12.6.4}$ Vi finner først lineariseringen i punktet $(2, 2)$. Vi har

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -24\frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= -24\frac{2y+x}{(x^2+xy+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Lineariseringen er derfor

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(2,2) + f_x(2,2)(x-2) + f_y(2,2)(y-2) \\ &= 2 - (x-2) - (y-2), \end{aligned}$$

og vi får approksimasjonen

$$\begin{aligned} f(2{,}1; 1{,}8) \approx L(2{,}1; 1{,}8) &= 2 - 0{,}1 + 0{,}2 \\ &= 2{,}1. \end{aligned}$$

$\boxed{12.6.18}$ Vi bruker definisjonen av Jacobi–matrisen, og får

$$D\mathbf{f}(R,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & R\cos\phi\cos\theta & -R\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & R\cos\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -R\sin\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{12.7.4}$ Vi har funksjonen gitt ved $f(x,y) = e^{xy}$ og punktet $(2,0)$.

a) Gradienten til en funksjon i to variable er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

i dette tilfellet

$$\nabla f(x,y) = \left(ye^{xy}, xe^{xy}\right).$$

Evaluert i $(2,0)$ får vi dermed

$$\nabla f(2,0) = (0,2).$$

b) Tangentplanet til grafen $z = f(x,y)$ i punktet $(x,y) = (2,0)$ er gitt ved likningen

$$\begin{aligned} z &= f(2,0) + \nabla f(2,0) \cdot (x-2, y-0) \\ &= 1 + (0,2) \cdot (x-2, y) \\ &= 1 + 2y, \end{aligned}$$

eller

$$z - 2y - 1 = 0.$$

c) For å finne likningen for den rette linjen som tangerer nivåkurven[1] finner vi først en likning for nivåkurven som går gjennom punktet vårt. Denne er gitt ved

$$e^{xy} = f(x,y) = f(2,0) = 1,$$

eller

$$xy = 0,$$

som altså er unionen av koordinataksene. Linjen som tangerer denne nivåkurven i punktet $(2,0)$ er nødvendigvis gitt ved likningen

$$y = 0.$$

$\boxed{12.7.14}$ Vi har $f(x,y) = \ln|\mathbf{r}|$, hvor $\mathbf{r} = (x,y)$, og skal finne gradienten til denne. Vi kan skrive om funksjonen for å gjøre det enklere først:

$$f(x,y) = \ln|\mathbf{r}| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right).$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{(x,y)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}, \end{aligned}$$

ved bruk av kjerneregelen.

[1]Se nederst på side 724 i boka for en forklaring av forskjellen mellom det vi finner i **b)** og **c)**.

$\boxed{12.8.4}$ Definér funksjonen f ved $f(x,y,z) = e^{yz} - x^2 z\ln(y) - \pi$ for $x \in \mathbb{R}, y \in (0,\infty), z \in \mathbb{R}$. Da svarer likningen til $f(x,y,z) = 0$. Anta at $\vec{p} = (x_0, y_0, z_0)$ tilfredstiller likningen. Da sier det implisitte funksjonsteoremet at det finnes en løsning $y(x,z)$ i en omegn om punktet $\vec{p}$ dersom

$$\partial_y f(x_0,y_0,z_0) = z_0\left(e^{y_0 x_0} - \frac{x_0^2}{y_0}\right) \neq 0,$$

som er ekvivalent med at

$$z_0 \neq 0 \quad \text{og} \quad y_0 e^{y_0 x_0} \neq x_0^2.$$

For en slik løsning $y(x,z)$ av likningen kan vi derivere likningen

$$f(x, y(x,z), z) = 0$$

med hensyn på z og få

$$(\partial_z y z + y)\, e^{yz} - x^2\ln(y) - x^2 z\frac{1}{y}\partial_z y = 0,$$

eller

$$\partial_z y = \frac{x^2 y\ln(y) - y^2 e^{yz}}{yze^{yz} - x^2 z}.$$

$\boxed{12.8.14}$ Definér funksjonene f og g ved $f(x,y,r,s) = x - r^2 - 2s$ og $g(x,y,r,s) = y + 2r - s^2$. Da svarer de oppgitte likningene til

$$\begin{aligned} f(x,y,r,s) &= 0 \\ g(x,y,r,s) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vi har jacobideterminanten

$$J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix} f_r & f_s \\ g_r & g_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2r & -2 \\ 2 & -2s \end{vmatrix} = 4(1+rs),$$

og ser at $J \neq 0$ hvis $rs \neq -1$. Altså kan vi løse ligningssystemet (1) i r og s (som funksjoner av x og y) i en omegn om alle punkter $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, r_0, s_0)$ som oppfyller $r_0 s_0 \neq -1$. Videre har vi fra implisitt funksjonsteorem at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,s)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2s \end{vmatrix} = \frac{s}{2(1+rs)}, \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,s)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2s \end{vmatrix} = -\frac{1}{2(1+rs)}, \\
\frac{\partial s}{\partial x} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(f,g)}{\partial(r,x)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -2r & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2(1+rs)}, \\
\frac{\partial s}{\partial y} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(f,g)}{\partial(r,y)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -2r & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{r}{2(1+rs)},
\end{aligned}$$

og spesielt har vi i punktet $\vec{0} = (0,0,0,0)$ (som oppfyller betingelsen $r_0 s_0 \neq -1$) at

$$\left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{\vec{0}} = 0, \quad \left.\frac{\partial r}{\partial y}\right|_{\vec{0}} = -\frac{1}{2}, \quad \left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{\vec{0}} = \frac{1}{2}, \quad \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_{\vec{0}} = 0.$$

Review 12.4 Vi har funksjonen f definert ved delt forskrift:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{hvis } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{hvis } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Vi undersøker om de førsteordens partiellderiverte eksisterer i $(0,0)$ ved å bruke grenseverdidefinisjonen av de partiellderiverte i $(0,0)$ direkte.

Vi begynner med den partiellderiverte med hensyn på første argument

$$\begin{aligned} f_1(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2+0}-0}{h}=1. \end{aligned}$$

Tilsvarende, for andre argument,

$$\begin{aligned} f_2(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{0+h^2}-0}{h}=0. \end{aligned}$$

Grensene eksisterer, så vi har $f_1(0,0)=1$ og $f_2(0,0)=0$.

For å kunne vurdere om de høyereordens partiellderiverte eksisterer i $(0,0)$, må vi finne de førsteordens partiellderiverte i et vilkårlig punkt $(x,y)\neq(0,0)$. Vi har at

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\\ f_2(x,y) &= -\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \end{aligned}$$

for alle $(x,y)\neq(0,0)$.

Igjen må vi bruke grenseverdidefinisjonen for å vurdere om $f_{21}(0,0)$ og $f_{12}(0,0)$ eksisterer.

$$\begin{aligned} f_{21}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_2(0+h,0)-f_2(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{\left(h^2+0\right)^2}-0}{h}=0, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f_{12}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_1(0,0+h)-f_1(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0+0}{h^4}-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{h}, \end{aligned}$$

som ikke eksisterer.