TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 15

Våren 2018

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 8. utg.

Oppgaver til plenumsregning

Eks. S06, oppg. 4 La T vere det romleget området gitt i sylinderkoordinater ved

$$0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le z \le 2,$$

og la S vere overflata til T. La vidare

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^3)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - y^3)\mathbf{k}.$$

a) Finn fluksen $\iint_{S'} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS$ ut gjennom den krumme delen S' av flata S.

b) Finn fluksen $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS$ ut gjennom S.

Eks. S12, oppg. 6 Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T.

a) Finn volumet til T.

La videre $\mathbf{F}$ være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}.$$

Regn ut

b) $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma,$ **c)** $\displaystyle\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma.$

Eks. S11, oppg. 8 La S være flaten gitt ved

$$x^2 + y^2 \le 1, \qquad z = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

og la $\mathbf{F}$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\mathrm{e}^{y+z} - 2y)\,\mathbf{i} + (x\mathrm{e}^{y+z} + y)\,\mathbf{j} + \mathrm{e}^{x+y}\mathbf{k}.$$

a) Vis at

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = 2\pi, \qquad (d\sigma = dS)$$

der $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen til S med positiv $\mathbf{k}$-komponent.

b) La S' være flaten gitt ved

$$z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, \qquad z \ge \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Regn ut $\iint_{S'} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}'\, d\sigma$ der $\mathbf{n}'$ er enhetsnormalen til S' med positiv $\mathbf{k}$-komponent.
(Hint: Stokes' teorem.)

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{16.4.4}$ Bruk divergensteoremet til å finne fluksen av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + 3yz^2\mathbf{j} + (3y^2z + x^2)\mathbf{k}$$

ut av kuleskallet S gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, hvor $a > 0$.

$\boxed{16.4.5}$ Regn ut fluksen av $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut av kula $(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 \le 9$.

$\boxed{16.4.12}$ Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + xz)\mathbf{i} + (y + yz)\mathbf{j} - (2x + z^2)\mathbf{k}$ oppover gjennom den delen av kuleskallet $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ som ligger i 1. oktant.

$\boxed{16.4.29}$ Benytt divergensteoremet på vektorfeltet $\mathbf{F} = \phi\mathbf{c}$, where $\mathbf{c}$ er en vilkårlig konstant vektor, til å vise at

$$\iiint_D \nabla\phi \, dV = \oint\!\!\!\oint_S \phi\hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

$\boxed{16.5.1}$ Regn ut

$$\oint_C xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$$

rundt trekanten C med hjørnepunkt $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$, orientert med klokka sett fra punktet $(1,1,1)$.

$\boxed{16.5.2}$ Evaluer

$$\oint_C y\,dx - x\,dy + z^2\,dz$$

rundt skjæringskurven C til sylindrene $z = y^2$ og $x^2 + y^2 = 4$, orientert mot klokka sett fra et punkt høyt oppe på z-aksen.

$\boxed{16.5.3}$ La $\mathcal{S}$ være halvkula $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ hvor $z \ge 0$, med utadrettet enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$, og la

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}.$$

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

$\boxed{16.5.5}$ Bruk Stokes' teorem til å vise at

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \sqrt{3}\pi a^2,$$

hvor C er skjæringskurven mellom flatene $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ og $x + y + z = 0$, med passende orientering.

$\boxed{16.5.10}$ La C være kurven definert av $(x-1)^2 + 4y^2 = 16$ og $2x + y + z = 3$, orientert mot klokka sett fra et punkt høyt oppe på z-aksen, og la

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(z^2 + y^2 + \sin x^2\right)\mathbf{i} + (2xy + z)\,\mathbf{j} + (xz + 2yz)\,\mathbf{k}.$$

Regn ut $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.