TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 12

Våren 2018

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 8. utg.

Oppgaver til plenumsregning

Eks. S16, oppg. 7 La $\mathcal{C}$ være randen til firkanten med hjørner i $(-2,1)$, $(-2,-3)$, $(1,0)$ og $(1,7)$, der $\mathcal{C}$ er orientert mot urviseren. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} xy\,dx + 2x\,dy.$$

Eks. S17, oppg. 8 Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} (3x+2y)\,dx + \left(x + 2\sin(y^3)\right)dy$$

der $\mathcal{C}$ er den delen av sirkelen $x^2 + y^2 = 4$ der $y \geq 0$ og hvor $\mathcal{C}$ er orientert mot klokka.

Eks. V12, oppg. 5

a) Ligningen $4x^2 + 24x + 9y^2 = 0$ beskriver en ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengden til store og lille halvakse, og skissér ellipsen.

b) Den rette linja $y = -2x/\sqrt{3}$ deler ellipsen fra a) i to deler. La $\mathcal{C}$ være den korteste av disse to delene, orientert fra høyre mot venstre. Finn

$$\int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy.$$

(*Hint:* Parametriseringen $x = 3\cos t - 3$, $y = 2\sin t$ kan brukes.)

c) Regn ut arelaet avgrensa av $\mathcal{C}$ og linja $y = -2x/\sqrt{3}$. (*Hint:* Greens teorem.)

Oppgaver med løsningsforslag

Regn ut div $\mathbf{F}$ og curl $\mathbf{F}$ for følgende vektorfelt:

16.1.2 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

16.1.4 $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

16.1.7 $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$.

16.1.9 $\mathbf{F}(r,\theta) = r\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$,
hvor (r,θ) er polarkoordinater i planet.

Bevis identitetene

$\boxed{16.2.2}$ $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

$\boxed{16.2.5}$ $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$.

$\boxed{16.2.6}$ $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$.

$\boxed{16.2.10}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}$ på $\mathbb{R}^3$ være både rotasjonsfritt og solenoidalt. Vis at de tre komponentene til $\mathbf{F}$ samt skalarpotensialet til $\mathbf{F}$ utgjør harmoniske funksjoner i $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{16.2.17}$ Vis at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathrm{e}^{2z}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

er et solenoidalt vektorfelt og finn deretter en tilhørende potensialfunksjon.

$\boxed{16.3.1}$ Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(\sin x + 3y^2\right) dx + \left(2x - \mathrm{e}^{-y^2}\right) dy,$$

hvor $\mathcal{C}$ er randen til halvdisken $x^2 + y^2 \leq a^2$ med $y \geq 0$, orientert mot klokka.

$\boxed{16.3.3}$ Finn verdien av

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(x\sin(y^2) - y^2\right) dx + \left(x^2 y\cos(y^2) + 3x\right) dy,$$

der $\mathcal{C}$ er randen til trapeset med hjørepunkt $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ og $(0, 2)$, orientert mot klokka.

$\boxed{16.3.4}$ La $\mathcal{C}$ utgjøre randen til området i planet definert av $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$, orientert mot klokka. Evaluér

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 y\, dx - xy^2\, dy.$$

$\boxed{16.3.5}$ Benytt et linjeintegral til å finne arealet (i planet) som omkranses av kurven

$$\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + b\sin^3 t\,\mathbf{j} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$