Anbefalte oppgaver uke 10

Våren 2018

Nummererte oppgaver er hentet fra Adams og Essex' «Calculus: A complete course», 8. utg.

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{\text{Eks. S16, oppg. 7}}$ La $\mathcal{C}$ være randen til firkanten med hjørner i $(-2,1)$, $(-2,-3)$, $(1,0)$ og $(1,7)$, der $\mathcal{C}$ er orientert mot urviseren. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} xy\,dx + 2x\,dy.$$

$\boxed{\text{Eks. V16, oppg. 4}}$ Regn ut

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy,$$

der $\mathcal{C}$ er kurva gitt ved $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t \sin t)$ for $0 \le t \le 2\pi$.

$\boxed{\text{Eks. V11, oppg. 6}}$ Vi er gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy\mathrm{e}^{x^2}\mathbf{i} + \mathrm{e}^{x^2}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

a) Avgjør om $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt.

b) Finn verdien av linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

når $\mathcal{C}$ er romkurva med parameterfremstilling $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, hvor $0 \le t \le \pi$.

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{15.1.3}$ Skissér vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ i planet og bestem dets feltlinjer.

$\boxed{15.1.15}$ Beskriv strømlinjene til hastighetsfeltet $\mathbf{v}(x,y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

Avgjør om følgende to vektorfelt er konservative, og hvis ja, finn tilhørende potensialfunksjon(er).

$\boxed{15.2.3}$ $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

$\boxed{15.2.5}$ $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}$.

$\boxed{15.2.9}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2+y^2}{z^2}\mathbf{k}$$

er konservativt og finn dets potensialfunksjon. Beskriv ekvipotensialflatene og finn feltlinjene.

$\boxed{15.3.2}$ Regn ut $\int_{\mathcal{C}} y\,ds$ hvor $\mathcal{C}$ er gitt ved $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, der $0 \le t \le m$.

$\boxed{15.3.11}$ La $\mathcal{M}$ være en metalltråd i rommet formet som en sirkulær heliks (skruelinje) $x = \cos t$, $y = \sin t$ og $z = t$, der $0 \leq t \leq 2\pi$, med massetetthet $\delta(x, y, z) = z$. Finn massen og massesenteret til $\mathcal{M}$.

$\boxed{15.3.15}$ La $\mathcal{C}$ være den delen av skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ som ligger i først oktant. Regn ut $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\, ds$.

$\boxed{15.4.6}$ Regn ut flyten (kurveintegralet over tangentialkomponenten) av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$$

langs kurven $\mathcal{C}$ gitt ved linjesegmentene $(0, 0, 0)$ til $(1, 0, 0)$ til $(1, 1, 0)$ til $(1, 1, 1)$.

$\boxed{15.4.17}$ Regn ut de lukkede kurveintegralene

a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} x\, dy$; **b)** $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} y\, dx$

langs $\mathcal{C}$ gitt ved randen av den øvre halvdisken $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, orientert mot klokka.

$\boxed{\text{Review ex. 15.8}}$ La $\mathcal{C}$ være en vilkårlig kurve som starter i $(0, 1, -1)$ og slutter i $(2, 1, 1)$. For hvilke verdier av a, b og c kan du fastslå verdien av flyten

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (axy + 3yz)\mathbf{i} + (x^2 + 3xz + by^2 z)\mathbf{j} + (bxy + cy^3)\mathbf{k}$ uten å vite noe nærmere om $\mathcal{C}$? Hva blir verdien av integralet?