Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

16.4.4: Vi bruker Divergensteoremet til å skrive om fluksintegralet av curlen til volumintegralet av divergensen. Divergensen er

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Siden vi skal integrere over en kule, og integranden har sfærisk symmetri, velger vi å integrere i kulekoordinater. Siden vi integrerer over hele kula, blir integrasjonsgrensene at radien R går fra 0 til a, vinkelen θ går fra 0 til 2π, mens vinkelen ϕ går fra 0 til π.

$$\begin{aligned}
\iint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iiint \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \\
&= \iiint \left(3x^2 + 3z^2 + 3y^2\right) \mathrm{d}V \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3R^2) R^2 \sin(\phi)\, d\phi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}R \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3R^2) R^2 \sin(\phi)\, d\phi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}R \\
&= \frac{12\pi a^5}{5}.
\end{aligned}$$

16.4.5: Vi skal finne fluksen ut overflaten $\mathcal{S}$ til den solide ballen B med sentrum $S = (2, 0, 3)$ og radius $r = 3$, av vektorfeltet $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$. Ved Divergensteoremet er dette

$$\begin{aligned}
I = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS &= \iiint_B \mathbf{div}\ \mathbf{F}\, dV \\
&= \iiint_B 2(x + y + z)\, dV.
\end{aligned}$$

Dette integralet kan enten evalueres ved å skifte koordinater til kulekoordinater sentrert i S, eller å observere at det er $2(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})V$, hvor $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ er tyngdepunktet til B og V er volumet. Tyngdepunktet til en ball er dens senter og volumet er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, slik at

$$I = 2(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})V = 2(2 + 0 + 3)\frac{4}{3}\pi 3^3 = 360\pi.$$

16.4.12: Vi har at

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = z + (1+z) - 2z = 1,$$

så

$$\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \frac{1}{6}\pi a^3,$$

der R er regionen i første oktant begrenset av sfæren og koordinatplanene. Ved å beregne fluksen av $\mathbf{F}$ ut av de tre plane flatene på randa til R, kan vi bruke Divergensteoremet til å finne fluksen ut av den sfæriske delen. Delen av randa der $x = 0$ har normalvektor $-\mathbf{i}$. Vi har $\mathbf{F}(0, y, z) \cdot (-\mathbf{i}) = -y\,\mathbf{i}$. Ved å integrere i polarkoordinater[1] får vi at fluksen ut av denne delen er

$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} (-r\cos(\theta))r\, d\theta\, dr = -\frac{1}{3}a^3.$$

Delen av randa der $y = 0$ har normalvektor $-\mathbf{j}$, og siden $\mathbf{F}(x, 0, z) \cdot \mathbf{j} = 0$, er fluksen ut 0. Delen av randa der $z = 0$ har normalvektor $-\mathbf{k}$. Vi har $\mathbf{F}(x, y, 0) \cdot (-\mathbf{k}) = 2x\,\mathbf{i}$ og fluksen ut blir

$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} 2r\cos(\theta) r\, d\theta\, dr = \frac{2}{3}a^3.$$

Fluksen ut av den sfæriske delen av randa til R er derfor

$$\frac{1}{6}\pi a^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

16.4.29: La $\mathbf{c} = c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k}$. Vi har at

$$\nabla \cdot (\phi\,\mathbf{c}) = \frac{\partial \phi}{\partial x}c_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y}c_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z}c_3 = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{c},$$

og Divergensteoremet gir

$$\iiint_D \nabla\phi \cdot \mathbf{c}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \phi(\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{N}})\, dS,$$

det vil si

$$\left(\iiint_D \nabla\phi\, dV\right) \cdot \mathbf{c} = \left(\iint_{\mathcal{S}} \phi\,\hat{\mathbf{N}}\, dS\right) \cdot \mathbf{c}.$$

Siden $\mathbf{c}$ er en vilkårlig vektor, ser vi (for eksempel ved å la $\mathbf{c}$ være $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) at vi må ha

$$\iiint_D (\nabla\phi)\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \phi\,\hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

16.5.1: Vi bruker Stokes' Teorem. Vi har vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

med tilhørende curl

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k}.$$

Flaten vi skal integrere fluksen til curlen over er gitt ved

$$\mathcal{S}: \quad z = 1 - x - y, \qquad x, y, z \geq 0,$$

[1] Mer presist er transformasjonen vi bruker $y = r\cos(\theta)$, $z = r\sin(\theta)$.

og denne flate har en konstant enhets-normalvektor

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

der minustegnet kommer fra den gitte orienteringa av randa. Vi får altså

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\mathcal{S}} (y + z + x)\, dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\mathcal{S}} (y + (1 - x - y) + x)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Areal}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Her brukte vi at $\text{Areal}(\mathcal{S}) = \sqrt{3}/2$, siden $\mathcal{S}$ er en likesidet trekant med sidelengde $\sqrt{2}$.

16.5.2: I stedet for å beregne linjeintegralet direkte bruker vi Stokes' teorem. Det er naturlig å la flaten S være den delen av sylinderen $z = y^2$ som ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 4$. Da er $\mathcal{C}$ randen til $\mathcal{S}$, og projeksjonen av $\mathcal{S}$ ned i xy-planet blir disken $x^2 + y^2 \leq 4$. Merk at integralet i oppgaven er lik

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

med

$$\nabla \times \mathbf{F} = -2\mathbf{k}.$$

Det neste vi trenger er arealelementet og den oppoverpekende enhetsnormalen på $\mathcal{S}$. Siden punktene på $\mathcal{S}$ tilfredstiller

$$G(x, y, z) = z - y^2 = 0$$

finner vi (merk at $\hat{\mathbf{N}}$ blir oppoverpekende fordi $G_z > 0$)

$$\begin{aligned}
dS &= \left| \frac{\nabla G}{G_z} \right| dx\, dy \\
\hat{\mathbf{N}} &= \frac{\nabla G}{|\nabla G|},
\end{aligned}$$

og dermed

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = (-2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy.$$

Vi har nå

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (-2\mathbf{k}) \cdot (-2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy \\
&= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx\, dy \\
&= -2 \cdot \pi \cdot 2^2 \\
&= -8\pi,
\end{aligned}$$

der vi har spart litt arbeid ved å benytte at vi kjenner arealet innenfor sirkelen med radius 2.

16.5.3: Integralet er ikke enkelt å beregne i den formen det står, men fra Stokes' teorem er

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}$ er sirkelen $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, orientert mot klokken sett ovenfra. Siden disken $x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$ har samme rand kan vi benytte Stokes' teorem enda en gang for å konkludere at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (\nabla \times \mathbf{F})|_{z=0} \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy.$$

Siden

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} &= \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 3y & -2xz \end{vmatrix} \\ &= -2z - 3\end{aligned}$$

finner vi derfor

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS &= -3 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dx\, dy \\ &= -3 \cdot \pi a^2 \\ &= -3\pi a^2.\end{aligned}$$

16.5.4: Randa $\partial\mathcal{S}$ til $\mathcal{S}$ er sirkelen $x^2 + y^2 = 4$ i xy-planet. Av Stokes' Teorem er fluksen av $\nabla \times \mathbf{F}$ ut av $\mathcal{S}$ lik linjeintegralet av $\mathcal{F}$ rundt $\partial\mathcal{S}$, orientert mot klokka. Men ved å bruke Stokes' Teorem igjen, så er dette også lik fluksen av $\nabla \times \mathbf{F}$ opp gjennom disken D gitt ved $x^2 + y^2 \leq 4$ i xy-planet; denne fluksen er enkel å beregne:

$$\begin{aligned}\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\; dA &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A \\ &= \iint_D \left(3x^2 + 3y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^2\right) r\, dr\, d\theta \\ &= 24\pi.\end{aligned}$$

Se også Eksempel 2 side 933 i Adams.

16.5.10: Vi bruker Stokes' Teorem til å skrive om linjeintegralet av $\mathbf{F}$ til et fluksintegral av $\nabla \times \mathbf{F}$. Flaten vi skal integrere fluksen over er gitt ved

$$\mathcal{S}: \quad z = 3 - 2x - y, \qquad (x-1)^2 + 4y^2 \leq 16.$$

For å få riktig orientering, velger vi enhets-normalvektoren lik den enhets-normalvektoren til planet $2x + y + z = 3$ som har positiv z-koordinat, det vil si

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\,.$$

Normalkomponenten til curl'en av $\mathbf{F}$ er derfor gitt ved

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = ((2z-1)\mathbf{i} + z\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(5z-2).$$

Fluksen er derfor gitt ved

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\sqrt{6}}(5z-2)\,dA &= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\mathcal{S}} (13 - 10x - 5y)\,dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\mathcal{S}} (3 - 10(x-1) - 5y)\,dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\mathcal{S}} 3\,dA \\
&= \frac{3}{\sqrt{6}} \text{Areal}(\mathcal{S}),
\end{aligned}$$

der vi i nest siste linje brukte symmetri. Arealet av $\mathcal{S}$ er lik arealet av projeksjonen ned i xy-planet (en ellipse i dette tilfellet) ganget med $|\mathbf{n}|/|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}| = \sqrt{6}$ (se f.eks. Adams side 893). Ved å bruke formelen for arealet av en ellipse ser vi at arealet av $\mathcal{S}$ er $8\pi\sqrt{6}$. Fluksen er altså

$$\frac{3}{\sqrt{6}}(8\pi\sqrt{6}) = 24\pi.$$