



Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

16.3.1: La R være halv-disken innenfor C . Da sier Greens teorem at

$$\begin{aligned}\oint_C \left((\sin(x) + 3y^2) dx + (2x - e^{-y^2}) dy \right) &= \iint_R \left(\partial_x(2x - e^{-y^2}) - \partial_y(\sin(x) + 3y^2) \right) dA \\ &= \iint_R (2 - 6y) dA \\ &= 2 \iint_R dA - 6 \iint_R y dA \\ &= \pi a^2 - 6 \iint_R y dA,\end{aligned}$$

hvor vi på siste linje har benyttet at vi kjenner arealet til halv-disken. Siden $R = \{(x, y) : -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$ kan vi beregne det andre integralet ved hjelp av et iterert integral. Vi får

$$\begin{aligned}\oint_C \left((\sin(x) + 3y^2) dx + (2x - e^{-y^2}) dy \right) &= \pi a^2 - 6 \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y dy dx \\ &= \pi a^2 - 3 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \pi a^2 - 6(a^3 - \frac{1}{3}a^3) \\ &= \pi a^2 - 4a^3.\end{aligned}$$

16.3.3: Me skal evaluera linjeintegralet

$$\oint_C (x \sin(y^2) - y^2) dx + (x^2 y \cos(y^2) + 3x) dy, \quad (\text{mot klokka})$$

langs randa til trapeset R med hjørne i $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ og $(0, 2)$. Me mistenker at dette lettast kan gjerast ved bruk av Greens teorem,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA.$$

I dette tilfellet har ein då $F_1(x, y) = x \sin(y^2) - y^2$, $F_2(x, y) = x^2 y \cos(y^2) + 3x$, og dermed $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy \cos(y^2) + 3$ og $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy \cos(y^2) - 2y$ sånn at integranden i dobbeltintegralet vert $3 + 2y$. Green gjev då

$$\oint_C (x \sin(y^2) - y^2) dx + (x^2 y \cos(y^2) + 3x) dy = 3 \iint_R dA + 2 \iint_R y dA.$$

Merk at trapeset R er symmetrisk om x -aksen og dermed vil det andre integralet på høgresida bli 0 fordi y er antisymmetrisk om x -aksen. Dermed står ein igjen med det første integralet på høgresida som berre er 3 gonger arealet av trapeset R som har parallelle sider med lengde 4 og 2 og høgde 1. Det vil seia at svaret er

$$3 \iint_R dA = 3 \times \text{areal}(R) = 3 \times \frac{(4+2)1}{2} = 9.$$

16.3.4: Vi skal evaluere linjeintegralet

$$\oint_C (x^2 y \, dx - xy^2 \, dy), \quad (\text{med klokka})$$

det vil si flyten av $\mathbf{F}(x, y) = x^2 y \mathbf{i} - xy^2 \mathbf{j}$ rundt C , der C er randa av regionen

$$D: \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \geq 0.$$

Green's Teorem sier at dette er det samme som å evaluere flateintegralet av z -komponenten til curl'en av \mathbf{F} over D , men der vi må gange med -1 siden C er orientert *med klokka*. Altså er

$$\begin{aligned} \oint_C (x^2 y \, dx - xy^2 \, dy) &= - \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA \\ &= - \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dA \\ &= \iint_D (x^2 + y^2) \, dA \\ &= \int_0^3 \int_0^\pi r^2 \, d\theta \, dr \\ &= 81\pi/4. \end{aligned}$$

16.3.5: For den gitte parametriseringen $\mathbf{r}(t) = a \cos^3(t) + b \sin^3(t)$, har vi at

$$\begin{aligned} x \, dy &= 3ab \cos^4(t) \sin^2(t) \, dt, \\ -y \, dx &= 3ab \sin^4(t) \cos^2(t) \, dt, \\ \frac{1}{2} (x \, dy - y \, dx) &= \frac{3ab}{2} \cos^2(t) \sin^2(t) (\cos^2(t) + \sin^2(t)) \, dt = \frac{3ab}{2} \cos^2(t) \sin^2(t) \, dt \end{aligned}$$

Alle tre av disse uttrykkene, når integrert fra 0 til 2π , gir arealet omsluttet av kurven. Da det siste uttrykket er enklest å integrere, velger vi dette.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (x \, dy - y \, dx) \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) \, dt \\ &= \frac{3ab}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \, dt \\ &= \frac{3\pi ab}{8}. \end{aligned}$$

16.3.6: Målet i denne oppgåva er å gå motsatt veg av beviset for divergensteoremet i planet på side 924 i boka. Me antar på same måte at R er eit regulært, lukka område i xy -planet som har ei rand \mathcal{C} beståande av ei eller fleire stykkevis glatte, enkle lukka kurvar som i si parametrisering går mot klokka. Det er òg gitt at $\hat{\mathbf{N}}$ er einingsnormalvektoren som peiker utover frå R og $\mathbf{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ er eit glatt vektorfelt på R . Me kan då anta at det todimensjonale divergensteoremet er gyldig,

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds,$$

(hugs at her er $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$) og me skal bruka dette til å visa Greens teorem:

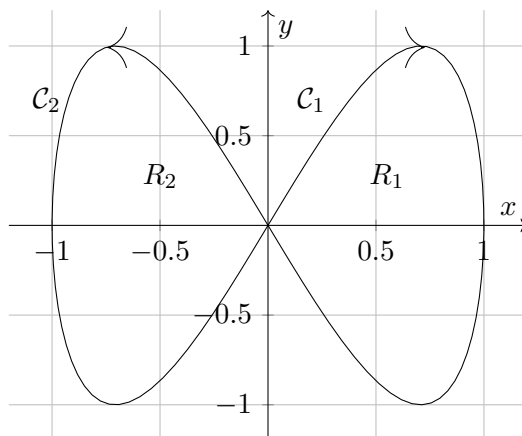
$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, ds \left(= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right).$$

For å bruka divergensteoremet må me først sørja for at integrandane i dei to flateintegrala er like, så me definerer hjelpe-vektorfeltet $\mathbf{G} = (F_2(x, y), -F_1(x, y))$. Sidan \mathbf{F} er glatt vil òg \mathbf{G} vera glatt og me ser at $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{G}$. Med same argumentasjon som i beviset for divergensteoremet har me at $\mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}$ (\mathbf{F} og \mathbf{G} har bytta rolle i dette tilfellet). Ved rein innsetting, bruk av divergensteoremet for \mathbf{G} og dei ovanståande identitetane finn me då

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{G} \, dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, ds \left(= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right),$$

som var det me skulle visa.

16.3.7: Me er gitt plankurva $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t) = (\sin t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, som illustrert nedanfor.



Vidare skal me evaluera $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der $\mathbf{F} = (ye^{x^2}, x^3e^y)$. Det er truleg mindre arbeidskrevande å bruka Greens teorem til å finna verdien av dette linjeintegralet ved å gjera det om til eit flateintegral. Merk at kurva utgjer randa til to ikkje-overlappande område, lat oss kalla dei R_1 og R_2 , med tilhøyrande randar \mathcal{C}_1 og \mathcal{C}_2 sånn at $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ for $0 \leq t \leq \pi$ og $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$ for $\pi \leq t \leq 2\pi$. Merk at \mathcal{C}_1 går med klokka, medan \mathcal{C}_2 går mot klokka. Dermed kan me dela linjeintegralet inn i to linjeintegral over som begge er langs ei enkel, glatt, lukka kurve og me kan bruka Greens teorem på kvart av dei. Integranden for flateintegralet er begge tilfelle gitt ved $g(x, y) := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x^2e^y - e^{x^2}$. Legg merke til at g er symmetrisk om y -aksen,

det vil seia $g(-x, y) = g(x, y)$. Dessutan kan me sjå at R_1 er speglinga av R_2 om y -aksen, som betyr at dersom $(x, y) \in R_2$ så er $(-x, y) \in R_1$. Dermed kan me skriva

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{-C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \iint_{R_1} g(x, y) dA + \iint_{R_2} g(x, y) dA \\ &= - \iint_{R_1} g(x, y) dA + \iint_{R_1} g(-x, y) dA \\ &= - \iint_{R_1} g(x, y) dA + \iint_{R_1} g(x, y) dA = 0, \end{aligned}$$

der me i andre overgang har skifta forteikn på integralet langs C_1 for å gå mot klokka, medan i fjerde overgang har me gjort variabelskiftet $(x, y) \mapsto (-x, y)$ i det andre flateintegralet for å integrera over R_1 i staden for R_2 . Her ser me at bidraget frå kvart flateintegral nullar einannan ut og me står igjen med at integralet er null.

16.3.9: La D_r være disken innenfor C_r , og la (x_0, y_0) være midtpunktet til D_r . Det vi ønsker å vise er at funksjonen v definert ved

$$v(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} u ds$$

er konstant lik $u(x_0, y_0)$. Det deles på $2\pi r$ fordi dette er lengden til kurven C_r , slik at v gir gjennomsnittsverdien til u på kurven. For å kunne derivere v må vi skrive integralet om på en slik måte at avhengigheten av r blir mer eksplisitt. Siden kurven C_r kan parametriseres som

$$\mathbf{r}(t) = (x_0, y_0) + r(\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

har vi

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t)) dt. \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} v'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_x u(\mathbf{r}(t)) \cos(t) + \partial_y u(\mathbf{r}(t)) \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla u(\mathbf{r}(t)) \cdot \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} \nabla u \cdot \hat{\mathbf{N}} ds, \end{aligned}$$

hvor $\hat{\mathbf{N}}$ er den utoverpekende enhetsnormalvektoren på C_r . I siste linje gikk vi tilbake til et linjeintegral igjen. Nå kan vi bruke divergensteoremet til å konkludere at

$$\begin{aligned} v'(r) &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \nabla \cdot \nabla u dA \\ &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \Delta u dA \\ &= 0, \end{aligned}$$

siden $\Delta u = 0$. Dermed er v konstant. Spesielt er

$$\begin{aligned} v(r) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} v(\rho) \\ &= u(x_0, y_0), \end{aligned}$$

hvor vi brukt at gjennomsnittsverdien på kurven vil gå mot verdien i (x_0, y_0) når radien går mot null (dette er oppgitt i oppgaven). Dette var det vi skulle vise.

Ekstra for de som er interesserte: Det kan nevnes at vi kan gå den andre veien også (for kontinuerlige funksjoner). Dersom en funksjon oppfyller denne egenskapen i alle punkter er den harmonisk. Dette er kanskje mer overraskende. La oss også bevise påstanden om at grensen av gjennomsnittsverdien blir verdien i midtpunktet. La derfor $\varepsilon > 0$. Vi har (hvorfor kan vi flytte $u(x_0, y_0)$ inn i integralet?)

$$\begin{aligned} |v(r) - u(x_0, y_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{r}(t)) dt - u(x_0, y_0) \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (u(\mathbf{r}(t)) - u(x_0, y_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(\mathbf{r}(t)) - u(x_0, y_0)| dt. \end{aligned}$$

Merk nå at $|\mathbf{r}(t) - (x_0, y_0)| = r$ for $t \in [0, 2\pi]$. Siden u er kontinuerlig i (x_0, y_0) kan vi velge $\delta > 0$ slik at dersom $r < \delta$ har vi $|u(\mathbf{r}(t)) - u(x_0, y_0)| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, 2\pi]$. For slike r har vi da

$$\begin{aligned} |v(r) - u(x_0, y_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon dt. \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

og vi har derfor at $\lim_{r \rightarrow 0} v(r) = u(x_0, y_0)$ siden ε var vilkårlig.

Review exercise 16.3: Me skal evaluera

$$\oint_C (3y^2 + 2xe^{y^2}) dx + (2x^2ye^{y^2}) dy \quad (\text{mot klokka})$$

langs randa til parallelogrammet R med hjørne i $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$ og $(1,1)$. Som vanleg mistenker me at dette kan gjerast lettare ved bruk av Greens teorem, og me identifiserer $F_1(x, y) = 3y^2 + 2xe^{y^2}$ og $F_2(x, y) = 2x^2ye^{y^2}$. Altså er

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4xye^{y^2} - (6y + 4xye^{y^2}) = -6y.$$

Merk at parallelogrammet R kan parametriserast på ein x -enkel måte som $y \leq x \leq y + 2$, $0 \leq y \leq 1$. Dermed får me

$$\begin{aligned} \oint_C (3y^2 + 2xe^{y^2}) dx + (2x^2ye^{y^2}) dy &= \iint_R (-6y) dA = -6 \int_0^1 \int_y^{y+2} y dx dy \\ &= -6 \int_0^1 2y dy = -6 [y^2]_0^1 = -6. \end{aligned}$$

Review exercise 16.10: La R være området som ligger innenfor C . Sirkulasjonen til \mathbf{F} rundt C er per definisjon gitt ved integralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C ((2y^3 - 3y + xy^2) dx + (x - x^3 + x^2y) dy),$$

som er lik

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_R (\partial_x(x - x^3 + x^2y) - \partial_y(2y^3 - 3y + xy^2)) dA \\ &= \iint_R ((1 - 3x^2 + 2xy) - (6y^2 - 3 + 2xy)) dA \\ &= \iint_R (4 - 3x^2 - 6y^2) dA \end{aligned}$$

fra Greens teorem. Vi ønsker at sirkulasjonen, og derfor dette dobbeltintegralet, skal være størst mulig. Dette oppnås ved å velge R til å være området der integranden er positiv, altså der $4 - 3x^2 - 6y^2 > 0$. Den største mulige sirkulasjonen får vi derfor når C er ellipsen som oppfyller $4 - 3x^2 - 6y^2 = 0$.