



Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

16.1.2: Vi bruker formlene på side 908 i boka og får

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0,$$

og

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \mathbf{k} = (0, 0, 0).$$

16.1.4: Divergensen til $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ er gitt ved

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \partial_x(yz) + \partial_y(xz) + \partial_z(xy) = 0.$$

Curlen til feltet er gitt ved

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = (x - x)\mathbf{i} - (y - y)\mathbf{j} + (z - z)\mathbf{k} = (0, 0, 0).$$

16.1.7: Gitt $\mathbf{F} = (f(x), g(y), h(z))$ finn me at divergensen er

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(y)}{\partial y} + \frac{\partial h(z)}{\partial z} = f'(x) + g'(y) + h'(z),$$

medan curlen er

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial h(z)}{\partial y} - \frac{\partial g(y)}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial z} - \frac{\partial h(z)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g(y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x)}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

16.1.9: Vi uttrykker først \mathbf{F} i kartesiske koordinater. Siden $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $\sin(\theta) = y/r = y/\sqrt{x^2 + y^2}$, får vi

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}.$$

Vi får følgelig divergensen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &= \partial_x \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + \partial_y \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \partial_z (0) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - y^2 / \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Curlen til feltet er gitt ved

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sqrt{x^2 + y^2} & y/\sqrt{x^2 + y^2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left[\partial_x \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \partial_y \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] \mathbf{k} \\ &= - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

En alternativ fremgangsmåte er å først vise at

$$\begin{aligned}\partial_x r &= \cos(\theta), & \partial_x \sin(\theta) &= \frac{-\cos(\theta) \sin(\theta)}{r}, \\ \partial_y r &= \sin(\theta), & \partial_y \sin(\theta) &= \frac{\cos^2(\theta)}{r},\end{aligned}$$

og deretter bruke disse direkte i derivasjonene. For eksempel blir divergensen

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r, \theta) = \partial_x (r) + \partial_y (\sin(\theta)) = \cos(\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{r},$$

som man kan sjekke stemmer overens med det vi fant i kartesiske koordinater. Curlen regnes ut tilsvarende.

16.2.2: Dette følger av definisjonen av ∇ , og produktregelen for derivasjon:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi F_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi F_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi F_3) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} F_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} F_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} F_3 + \phi \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \\ &= \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi \nabla \cdot \mathbf{F}.\end{aligned}$$

16.2.5: Per definisjon er

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \phi &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{pmatrix} \\ &= (\phi_{yx} - \phi_{xy}) \mathbf{i} - (\phi_{zx} - \phi_{xz}) \mathbf{j} + (\phi_{yx} - \phi_{xy}) \mathbf{k} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

der siste linje følger av likhet av blandede partiellderiverte.

16.2.6: Det er enklest å starte med venstre side, for så å prøve å få ut høyre side. Vi har

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2)\mathbf{i} + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3)\mathbf{j} + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\mathbf{k}$$

og derfor

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= (\partial_x \partial_y F_2 - \partial_y^2 F_1 - \partial_z^2 F_1 + \partial_x \partial_z F_3)\mathbf{i} \\ &\quad + (\partial_y \partial_z F_3 - \partial_z^2 F_2 - \partial_x^2 F_2 + \partial_x \partial_y F_1)\mathbf{j} \\ &\quad + (\partial_x \partial_z F_1 - \partial_x^2 F_3 - \partial_y^2 F_3 + \partial_y \partial_z F_2)\mathbf{k} \\ &= (\partial_x(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_1 - \partial_y^2 F_1 - \partial_z^2 F_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (\partial_y(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_2 - \partial_y^2 F_2 - \partial_z^2 F_2)\mathbf{j} \\ &\quad + (\partial_z(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_3 - \partial_y^2 F_3 - \partial_z^2 F_3)\mathbf{k} \\ &= (\partial_x(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta F_1)\mathbf{i} + (\partial_y(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta F_2)\mathbf{j} + (\partial_z(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta F_3)\mathbf{k} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Merk at vi la til og trakk fra $\partial_x^2 F_1 \mathbf{i}$, og tilsvarende for de to andre komponentene. Her har vi brukt standardnotasjonen Δ for Laplace-operatoren, som tilsvarer ∇^2 i boka.

16.2.10: Fra definisjonen på side 916 i boka og oppgave 16.2.10 har vi

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \nabla(0) - \nabla \times \mathbf{0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

som viser at komponentene til \mathbf{F} er harmoniske. Siden $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ finnes det et (skalar)potensial φ slik at $\mathbf{F} = \nabla \varphi$. Denne funksjonen er også harmonisk, siden

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \nabla \cdot (\nabla \varphi) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ &= 0. \end{aligned}$$

16.2.17: At \mathbf{F} er et divergensfritt (solenoidal) vektorfelt svarer til at $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Vi verifiserer:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = e^{2z} + e^{2z} - 2e^{2z} = 0.$$

Siden \mathbf{F} er divergensfritt finnes det et vektorpotensial \mathbf{G} for \mathbf{F} , slik at $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$. Komponentene til dette potensialet må derfor oppfylle

$$\partial_y G_3 - \partial_z G_2 = x e^{2z}, \quad (1)$$

$$\partial_z G_1 - \partial_x G_3 = y e^{2z}, \quad (2)$$

$$\partial_x G_2 - \partial_y G_1 = -e^{2z}. \quad (3)$$

Potensialet \mathbf{G} er ikke entydig, så vi kan ta oss noen friheter når vi finner et. La oss derfor anta at $G_3 = 0$. Ved å integrere (1) og 2 finner vi da

$$G_1 = \frac{1}{2}ye^{2z} + f(x, y)$$
$$G_2 = -\frac{1}{2}xe^{2z} + g(x, y),$$

der (3) impliserer at f og g må oppfylle

$$\partial_x f - \partial_y g = 0.$$

Vi kan like gjerne velge $f = g = 0$. Da ender vi opp med

$$\mathbf{G}(x, y) = \left(\frac{1}{2}ye^{2z}, -\frac{1}{2}xe^{2z}, 0 \right).$$

som vektorpotensial for \mathbf{F} . Igjen understrekes det at \mathbf{G} ikke er entydig.