

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

**15.1.3:** Siden vektorfeltet er gitt ved  $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$  må feltlinjene tilfredstille differensiallikningen

$$y' = \frac{x}{y},$$

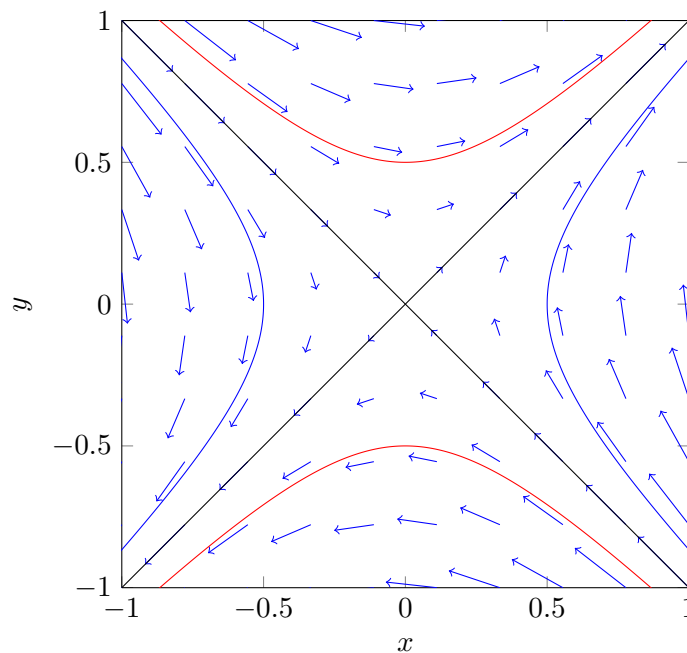
eller

$$\left(\frac{1}{2}y^2\right)' = x.$$

Ved å integrere denne likningen finner vi

$$y^2 - x^2 = c,$$

som beskriver hyperbler sentrert i origo. Det er tre ulike tilfeller å skille mellom: Hvis  $c > 0$  ligger brennpunktene på  $y$ -aksen, mens de ligger på  $x$ -aksen når  $c < 0$ . Spesialtilfellet  $c = 0$  svarer til de to linjene  $y = \pm x$ . Merk også at alle feltlinjene har disse to linjene som asymptoter. Se 1 for  $c = \pm 1/4$  og  $c = 0$ .



Figur 1: Vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$  og utvalgte feltlinjer.

**15.1.15:** La  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  være strømlinjenes parametrisering. Vi krever

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(x, y),$$

eller

$$x'(t) = x^2 \quad \text{og} \quad y'(t) = -y,$$

som gir  $y(t) = C_1 e^{-t}$  og  $x(t) = \frac{1}{C_2 - t}$ .

**15.2.3:** Siden

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \neq \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

er vektorfeltet ikke konservativt.

**15.2.5:** Vi regner først ut de nødvendige partiellderiverte for å se om vektorfeltet oppfyller de nødvendige betingelsene for å være konservativt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2x, & \frac{\partial F_1}{\partial z} &= -2z, & \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2x, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 2y, & \frac{\partial F_3}{\partial x} &= -2x, & \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 2y, \end{aligned}$$

fra dette ser vi at

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

De nødvendige betingelsene er altså oppfylt, og siden vi i dette tilfellet har at  $\mathbf{F}$  er glatt og domenet er hele det euklidiske rommet  $\mathbb{R}^3$  har vi fra forelesningene at dette er tilstrekkelig til å si at vektorfeltet er konservativt.

Ved inspeksjon ser vi at

$$\phi(x, y, z) = x^2 y + y^2 z - z^2 x,$$

er en mulig potensialfunksjon.

**15.2.9:** Vi søker en potensialfunksjon  $\phi$  slik at

$$\nabla\phi(x, y, z) = \left( \frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right),$$

og la oss her betrakte domenet gitt av  $z > 0$  for å sørge for at komponentene i vektorfeltet og deres partiellderiverte alltid er veldefinerte. Første komponent i denne vektorligningen er  $\phi_x(x, y, z) = 2x/z$ , som gir at

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{z} + C(y, z),$$

for en deriverbar funksjon  $C$ . Ved å partiellderivere dette uttrykket for  $\phi$  med hensyn på  $y$ , kombinert med andre komponent av vektorligningen, gir

$$C_y(y, z) = \frac{2y}{z},$$

som betyr at  $C(y, z) = \frac{y^2}{z} + K(z)$ , for en deriverbar funksjon  $K$ . Vi har nå at  $\phi(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{z} + K(z)$ . Ved å partiellderivere med hensyn på  $z$  får vi

$$-\frac{x^2 + y^2}{z^2} + K'(z) = -\frac{x^2 + y^2}{z^2},$$

som medfører at  $K$  er en konstant. Alt i alt kan vi konkludere med at feltet er konservativt, med potensialfunksjon

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z} + \text{konstant}.$$

For å finne ekvipotensialflatene setter vi potensialfunksjonen lik en konstant og ender opp med uttrykket

$$z = C(x^2 + y^2),$$

som angir et sett med paraboloider. For å finne de tilhørende feltlinjene setter vi opp differensialuttrykkene som disse oppfyller

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)},$$

som er ekvivalent med

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{2z dz}{x^2 + y^2}.$$

Ved å integrere opp den første likheten finner vi

$$\ln |y| = \ln |x| + C_0,$$

eller

$$|y| = e^{C_0}|x| \Leftrightarrow |y| = |\pm e^{C_0}x| \Leftrightarrow y = Bx \text{ for } B \in \mathbb{R}.$$

Ved å bruke ovenstående sammenheng og ligningen for feltlinjene har vi da

$$(1 + B^2)x dx = -2z dz,$$

som gir

$$(1 + B^2)\frac{x^2}{2} = -z^2 + A,$$

eller

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = A$$

for  $A \in \mathbb{R}$ . Altså er feltlinjene gitt av planene  $y = Bx$  og ellipsene  $x^2 + y^2 + 2z^2 = A$ .

**15.3.2:** Den generelle formelen for kurveintegralet av en funksjon med hensyn på kurvelengden er gitt ved

$$\int_C f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| ds.$$

I vårt tilfelle er  $f(\mathbf{r}(t)) = t$ , og

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = |\mathbf{r}'(t)| = |(2t, 1, 2t)| = \sqrt{1 + 8t^2}.$$

Dermed er integralet vi skal finne

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} y \, ds &= \int_0^m t \sqrt{1 + 8t^2} \, dt \\ &= \frac{1}{16} \int_{t=0}^m \sqrt{u} \, du = \frac{1}{16} \left[ \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{t=0}^m \\ &= \frac{1}{24} \left[ (1 + 8t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^m \\ &= \frac{1}{24} \left( (1 + 8m^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)\end{aligned}$$

ved substitusjonen  $u = 1 + 8t^2$ ,  $du = 16t \, dt$ .

**15.3.11:** Massen er gitt ved

$$\begin{aligned}M &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \delta(x, y, z) \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{2} \, dt \\ &= 2\sqrt{2}\pi^2.\end{aligned}$$

Massesenteret er  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , der

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \int_0^{2\pi} \cos(t) t \sqrt{2} \, dt / M = 0, \\ \bar{y} &= \int_0^{2\pi} \sin(t) t \sqrt{2} \, dt / M = -1/\pi, \\ \bar{z} &= \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{2} \, dt / M = 4\pi/3.\end{aligned}$$

(De to første integralene kan løses ved delvis integrasjon.)

**15.3.15:** Vi begynner med å parametrisere kurven.

$$(a \cos(t), a \sin(t), a \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

som fremgår ved først å parametrisere en sirkel om origo med radius  $a$  i  $x$ - $y$ -planet, og så sette  $z = x$ .

Vi får da

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} x \, ds &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos(t) \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2} \, dt \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos(t) \sqrt{1 + \sin^2(t)} \, dt \\ &= a^2 \int_0^1 \sqrt{1 + v^2} \, dv,\end{aligned}$$

der vi brukte substitusjonen  $v = \sin(t)$ . Substitusjonen  $v = \sinh(p)$ , samt identiteten  $1 + \sinh^2(p) = \cosh^2(p)$ , gir så

$$\begin{aligned} a^2 \int_0^1 \sqrt{1+v^2} dv &= a^2 \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \cosh^2(p) dp \\ &= a^2 \left[ \frac{1}{2} \cosh(x) \sinh(x) + \frac{1}{2} x \right]_0^{\sinh^{-1}(1)} \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \sqrt{2} + \sinh^{-1}(1) \right). \end{aligned}$$

**15.4.6:** De tre linjesegmentene kan parametriseres som

$$\begin{aligned} (t, 0, 0), & \quad 0 \leq t \leq 1, \\ (1, s, 0), & \quad 0 \leq s \leq 1, \\ (1, 1, r), & \quad 0 \leq r \leq 1. \end{aligned}$$

Kall kurven bestående av disse tre linjesegmentene  $\mathcal{C}$ . Flyten av  $F$  langs  $\mathcal{C}$  er da gitt ved

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (t, 0, -t) \cdot (1, 0, 0) dt \\ &+ \int_0^1 (1, s, -(1+s)) \cdot (0, 1, 0) ds \\ &+ \int_0^1 (2, 1-r, -2) \cdot (0, 0, 1) dr \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1. \end{aligned}$$

En alternativ løsning er å observere at feltet er konservativt,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \left( \frac{x^2 + y^2}{2} - xz - yz \right),$$

for så å ta differansen av verdiene til denne potensialfunksjonen i endepunktene av kurven beskrevet over.

**15.4.17:** Vi begynner med å velge en parametrisering av integrasjonskurven  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : & \quad (t, 0), & \quad -a \leq t \leq a \\ \mathcal{C}_2 : & \quad (a \cos s, a \sin s) & \quad 0 \leq s \leq \pi, \end{aligned}$$

merk at dette gir den korrekte orienteringen, *mot klokka*. Begge integralene vi skal finne er da er summen av bidragene fra hver av disse to delene av kurven.

a) Vi regner ut integralet direkte

$$\begin{aligned}
 \oint_C x \, dy &= \int_{C_1} x \, dy + \int_{C_2} x \, dy \\
 &= \int_{-a}^a t \, d0 + \int_0^\pi a \cos s \, d(a \sin s) \\
 &= 0 + \int_0^\pi (a \cos s)(a \cos s) \, ds \\
 &= a^2 \left[ \frac{1}{2}s + \frac{1}{4} \sin 2s \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\pi a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

b) Tilsvarende har vi

$$\begin{aligned}
 \oint_C y \, dx &= \int_{C_1} y \, dx + \int_{C_2} y \, dx \\
 &= \int_{-a}^a 0 \, dt + \int_0^\pi a \sin s \, d(a \cos s) \\
 &= 0 + \int_0^\pi (a \sin s)(-a \sin s) \, ds \\
 &= -a^2 \left[ \frac{1}{2}s - \frac{1}{4} \sin 2s \right]_0^\pi \\
 &= -\frac{\pi a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

*Merk:* Oppgave 15.4.20 hintet til hvorfor summen av disse integralene er 0.

**Review exercise 15.8:** Integralet av funksjonen  $\mathbf{F}$  mellom de to punktene er uavhengig av valg av kurve mellom punktene dersom konstantene velges slik at  $\mathbf{F}$  er konservativ, i så fall er verdien av integralet differansen av verdiene til den tilhørende potensialfunksjonen i de aktuelle punktene.

Vi deriverer komponentene av  $\mathbf{F}$  for å finne betingelser på  $a$ ,  $b$ , og  $c$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_1}{\partial y} &= ax + 3z, & \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 3y, & \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2x + 3z, \\
 \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 3x + by^2, & \frac{\partial F_3}{\partial x} &= by, & \frac{\partial F_3}{\partial y} &= bx + 3cy^2.
 \end{aligned}$$

Fra dette ser vi at

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

kun dersom  $b = 3$ ,  $a = 2$ , og  $c = 1$ .

Vi har dermed funnet at

$$\mathbf{F} = (2xy + 3yz, x^2 + 3xz + 3y^2z, 3xy + y^3)$$

er konservativ. Ved inspeksjon ser vi at

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + 3xyz + y^3z$$

er en mulig potensialfunksjon.

Kurveintegralet av tangentialkomponenten av  $\mathbf{F}$  langs en vilkårlig kurve  $\mathcal{C}$  med endepunktene  $p_0 = (0, 1, -1)$  og  $p_1 = (2, 1, 1)$  blir dermed

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \varphi(p_1) - \varphi(p_0) = 11 - (-1) = 12.$$