



Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

14.5.7: Vi har at $\iiint_R xy \, dV = 0$, siden integranden er odde og integrasjonsområdet er symmetrisk om origo. Det følger at

$$\begin{aligned} I &= \iiint_R (xy + z^2) \, dV \\ &= \iiint_R z^2 \, dV \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^2 \, dz \, dy \, dx, \end{aligned}$$

der faktoren 4 kommer fra at vi utnytter symmetrien til å kun integrere over den delen av integrasjonsområdet som ligger i første kvadrant. Grensene er funnet ved å først se på området x kan variere over, deretter hvilket område y kan variere over når x er fiksert, og til slutt hvilket område z kan variere over når x og y er fikserte.

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^3 \, dy \, dx \\ &= \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{4}\right) \int_0^1 [(1-x-y)^4]_0^{1-x} \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^4 \, dx \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

14.5.15: Vi skal evaluere integralet

$$I = \iiint_T x \, dV,$$

hvor T er tetraederet avgrenset av planene $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, og $x + y + z = 2$. Vi kan skrive T om til $0 \leq x \leq 1$, $1 - x \leq y \leq 1$, og $2 - x - y \leq z \leq 1$. Merk at området er

symmetrisk i x, y, z , så andre valg er også gyldige. Dette gir

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_{2-x-y}^1 x \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 x [z]_{2-x-y}^1 \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 x(x+y-1) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 x \left[xy + \frac{1}{2}y^2 - y \right]_{1-x}^1 \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x ((1-x)^2 + 2x - 1) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \, dx \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

14.6.7: Me skal finna volumet V av området S som ligg i første oktant, mellom plana $y = 0$ og $y = x$ og inni ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Her kan me godt anta $a, b, c > 0$ sidan det er kvadrata av desse som inngår, og dermed vil svaret vera uavhengig av forteikna deira. Me følgjer først hintet i oppgåva og brukar variabelskiftet i Example 1 side 842, $x = au, y = bv, z = cw$ og dermed er $dV = abc \, du \, dv \, dw$. I det nye koordinatsystemet har ellipsen blitt ei sfære med radius 1, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, medan plana er gitt av $v = 0$ og $v = \frac{a}{b}u$. Lat oss kalla området i dei nye koordinata for T . Ved å skissera korleis T ser ut i uv -planet ser ein at vinkelen mellom plana er gitt ved $\theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$. Om ein no skiftar til kulekoordinat ($u = R \cos \theta \sin \phi$, etc.) ser ein at området vårt kan skrivast som $0 \leq R \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ og $0 \leq \theta \leq \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$. Dermed vert volumet av S

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_S dV = abc \iiint_T du \, dv \, dw = abc \int_0^{\arctan(a/b)} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 R^2 \sin \phi \, dR \, d\phi \, d\theta \\
 &= abc [\theta]_0^{\arctan(a/b)} \times [-\cos \phi]_0^{\pi/2} \times \left[\frac{R^3}{3} \right]_0^1 = \frac{abc}{3} \arctan\left(\frac{a}{b}\right).
 \end{aligned}$$

Alternativt til å gjera to koordinatskifte kunne me merka oss at T i uvw -koordinat er eit vinkelsegment (eller som eit kakestykke om du vil) av øvre halvdel av ei kule med radius 1. Volumet av halvkula er $\frac{4\pi 1^3}{3}/2 = \frac{2\pi}{3}$ og vinkelsegmentet utgjer $\frac{\arctan(a/b)}{2\pi}$ av halvkula. Skalert med Jacobi-determinanten abc frå uvw -koordinatskiftet finn ein då at volumet er $V = abc \times \frac{2\pi}{3} \times \frac{\arctan(a/b)}{2\pi} = \frac{abc}{3} \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$, som ovanfor.

14.6.10: Siden vi integrerer over en sylinder, lønner det seg å bruke sylinderkoordinater. I sylinderkoordinater er integrasjonsområdet gitt ved $0 \leq r \leq |a|$, $0 \leq z \leq h$, mens integranden blir $r^2 + z^2$. Ved å bruke formelen for volumelement i sylinderkoordinater

$dV = r dr d\theta dz$, finner vi at integralet er

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{|a|} \int_0^h \int_0^{2\pi} (r^2 + z^2)r d\theta dz dr \\ &= 2\pi \int_0^{|a|} \int_0^h (r^2 + z^2)r dz dr \\ &= 2\pi \int_0^{|a|} \left(hr^2 + \frac{h^3}{3} \right) r dr \\ &= \pi \left(\frac{h|a|^4}{2} + \frac{h^3|a|^2}{3} \right). \end{aligned}$$

14.6.15: Me skal evaluera integralet

$$\iiint_R z dV$$

der R er gitt ved $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, altså er R området over paraboloiden $z = x^2 + y^2$ og under kuleflata gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Sidan R er symmetrisk om z -aksen og høgda z er gitt eksplisitt i skildringa av R er det naturleg å bruka sylinderkoordinat her, sånn at R er gitt ved $r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}$. For å finna integrasjonsgrensene for r må me finna når $r^2 = \sqrt{2 - r^2}$, og dette kan me sjå at er når $r = 1$ (eventuelt løysa eit annangradsuttrykk for r^2 om du ikkje ser dette direkte). Dermed har me

$$\begin{aligned} \iiint_R z dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r dr \\ &= \pi \int_0^1 (2 - r^2 - r^4)r dr = \pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \pi \frac{12 - 3 - 2}{12} = \frac{7\pi}{12}. \end{aligned}$$

14.6.16: Me skal finna $\iiint_S x dV$ og $\iiint_S z dV$ der S er gitt av den delen av halvkula $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ som ligg i første oktant. Frå symmetrien i problemet vil desse to integrala ha same verdi (dette er integralet av avstanden frå origo til eit punkt langs ein av aksane og det er det same om ein vel x - eller z -aksen sidan S ikkje endrar seg om ein roterer koordinatsystemet), så me ser berre på det siste sidan i kulekoordinat er $z = R \cos \phi$ litt enklare enn $x = R \sin \theta \sin \phi$.

$$\begin{aligned} \iiint_R dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a R \cos \phi R^2 \sin \phi dR d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2\phi) d\phi \int_0^a R^3 dR = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{4} \cos(2\phi) \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

14.7.13: Me skal finna massen M til ein sfærisk planet med radius $a > 0$ som har masse-tettleik $\rho(R) = A/(B + R^2)$ for to positive konstantar A og B i avstand R frå sentrum. For å gjera det enkelt for oss sjølv kan me då seia at planeten har sentrum i origo. Me

finn massen ved å integrera massetettleiken over domenet som planeten utgjer, og i denne situasjonen er kulekoordinat det naturlege valet i og med at planeten er sfærisk og ρ berre avhenger av radien R .

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\{|R|\leq a\}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{A}{B+R^2} R^2 \sin \phi \, dR \, d\phi \, d\theta \\ &= 2\pi A [-\cos \phi]_0^\pi \int_0^a \frac{B+R^2-B}{B+R^2} dR = 4\pi A \int_0^a 1 - \frac{1}{1+(R/\sqrt{B})^2} dR \\ &= 4\pi A \left(a - \sqrt{B} [\arctan(y)]_0^{a/\sqrt{B}} \right) = 4\pi A \left(a - \sqrt{B} \arctan \left(\frac{a}{\sqrt{B}} \right) \right), \end{aligned}$$

der me har gjort substitusjonen $y = R/\sqrt{B}$.

14.7.18: Vi finner først massen, som per definisjon er tetthet integrert over volum.

$$\begin{aligned} M &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^a \int_0^a \left(\frac{1}{3}a^3 + ay^2 + az^2 \right) \, dy \, dz \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{3}a^4 + a^2z^2 \right) \, dz \\ &= \left(\frac{1}{3}a^5 + \frac{1}{3}a^5 + \frac{1}{3}a^5 \right) \\ &= a^5. \end{aligned}$$

Vi finner så $M_{x=0}$, som av symmetri er lik $M_{y=0}$ og $M_{z=0}$.

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a x(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^a \int_0^a \left(\frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{a^2}{2}z^2 \right) \, dx \, dy \\ &= \frac{a^6}{4} + \frac{a^6}{6} + \frac{a^6}{6} = \frac{7}{12}a^6. \end{aligned}$$

Følgelig er

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{M} (M_{x=0}, M_{y=0}, M_{z=0}) = \left(\frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}, \frac{7a}{12} \right).$$

14.7.20: På grunn av symmetri må vi ha $\bar{x} = \bar{y} = 0$, slik at det bare gjenstår å beregne \bar{z} . Dette gjøres enklest ved å benytte sylinderkoordinater. Vi finner først at

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, dr \end{aligned}$$

gir volumet til legemet. Substitusjonen $u = r^2$ gir

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\infty e^u du \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Vi finner nå

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{e^{-(x^2+y^2)}} z dz dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{e^{-r^2}} zr dz dr d\theta \\ &= \int_0^\infty re^{-2r^2} dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-u} du \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

hvor vi har brukt substitusjonen $u = 2r^2$.