TMA4105 Matematikk 2
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 7

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

14.4.2: Me skal evaluera integralet

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

på domenet D gitt av $x^2+y^2 \le a^2$, dvs. disken sentrert i origo med radius a. Ved å skifta til polarkoordinat finn me at D er gitt ved $r \le a$ og integralet vert

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2\,dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

14.4.6: Me skal evaluera integralet

$$\iint_D x^2y^2\,dA$$

på domenet D gitt av $x^2+y^2 \le a^2$, dvs. disken sentrert i origo med radius a. Ved å skifta til polarkoordinat finn me at D er gitt ved $r \le a$ og integralet vert

$$\begin{aligned}\iint_D x^2y^2\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^a (r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2\,r\,dr\,d\theta = \int_0^a r^5\,dr\int_0^{2\pi}(\cos\theta\sin\theta)^2\,d\theta\\ &= \frac{a^6}{6}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(2\cos\theta\sin\theta)^2\,d\theta = \frac{a^6}{24}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{a^6}{24}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos4\theta)\,d\theta\\ &= \frac{a^6}{24}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{8}\sin4\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi a^6}{24}.\end{aligned}$$

14.4.7: Vi skal evaluere integralet

$$I = \iint_Q y\,dA,$$

hvor Q er delene av disken $x^2+y^2 \le a^2$ som ligger i første kvadrant. For slike sirkelsektorlignende områder lønner det seg ofte å utføre et variabelskifte fra kartesiske til polarkoordinater. I polarkoordinater er området Q gitt ved $0 \le r \le a$ og $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, arealelementet er $dA = r\,dr\,d\theta$, og $y = r\sin\theta$. Vi får dermed

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\sin\theta r\,dr\,d\theta\\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^a r^2\,dr\right)\\ &= \frac{a^3}{3}.\end{aligned}$$

14.4.10: Vi skriver integralet i polarkoordinater. Q er området der $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le \pi/2$.

$$\begin{aligned}\iint_Q \frac{2xy}{x^2+y^2} dA &= \int_0^a \int_0^{\pi/2} \frac{2(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))}{r^2} r d\theta dr \\ &= \int_0^a \int_0^{\pi/2} r\sin(2\theta) d\theta dr \\ &= \int_0^a r\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} dr \\ &= \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

14.4.18: Vi skriver integralet i polarkoordinater.

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dA}{(1+x^2+y^2)^k} = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(1+r^2)^k} r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{(1+r^2)^k} r\, dr.$$

Vi gjør substitusjonen $u = 1 + r^2$, $du = 2r\, dr$, som gir at

$$I = \pi \int_1^\infty \frac{1}{u^k} du.$$

Slike p-integraler er beskrevet på side 364 i boka. Vi ender opp med

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{k-1}, & k > 1, \\ \infty, & k \le 1. \end{cases}$$

14.4.29: Vi tar vel sikte på å beregne volumet under funksjonen

$$z = f(x,y) = c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2},$$

(dette er den oppgitte ligningen løst for z) og så gange med to. Vi må altså beregne

$$\iint_E f(x,y) dA$$

der E er det indre av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Her kan det være lurt å innføre en variant av polarkoordinater, nemlig de *elliptiske koordinatene*

$$x = ar\cos\theta \qquad y = br\sin\theta.$$

Merk at dersom $a = b = 1$, får vi her de vanlige polarkoordinater; de elliptiske koordinatene er altså en generalisering av disse. Vi beregner Jacobi-determinanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} = abr,$$

og beregner integralet

$$\iint_E f(x,y) dA = abc \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{3} abc.$$

Volumet av ellispoiden blir da $\frac{4\pi}{3}abc$.

Eksamen vår 2016, oppgave 7: Lenke til løsningsforslag