Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

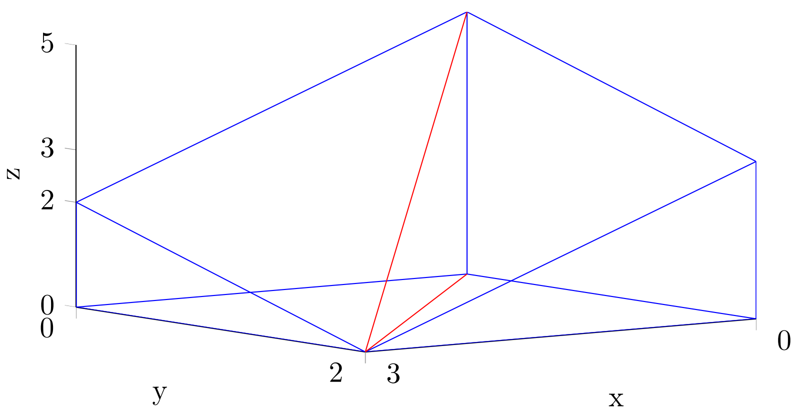
Løsningsforslag — Øving 6

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

14.1.6: Integralet svarer til volumet som ligger over rektangelet D og under planet $z = 5 - x - y$. Figur 1 viser hvordan vi kan dele opp volumet i to pyramider. Disse vil ha grunnflate i xz- og yz-planet, med "toppen" i punktet $(3, 2, 0)$. Vi finner derfor

$$\begin{aligned}\iint_D (5 - x - y)\, dA &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{2+5}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{3+5}{2}\right) \\ &= 7 + 8 \\ &= 15,\end{aligned}$$

der det første leddet svarer til pyramiden til venstre i figuren, mens det andre svarer til pyramiden til høyre.



Figur 1: Volumet vi er ute etter ligger innenfor de blå linjene. Planet som de røde linjene ligger i deler volumet opp i to pyramider.

14.1.14: Me bruker først at integralet er lineært til å dela det opp i to integral på følgjande vis,

$$\iint_D (x + 3)\, dA = \iint_D x\, dA + 3 \iint_D dA.$$

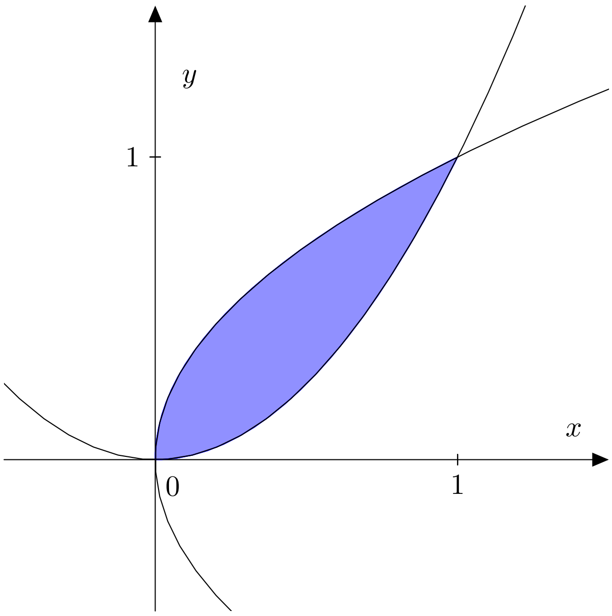
Merk at området D som skal integrerast over, gitt av $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, er det same som den delen av disken gitt ved $x^2 + y^2 \leq 2^2$ som ligg i øvre halvdel av xy-planet. Dermed er D symmetrisk om y-aksen, og sidan x er ein odde funksjon vil bidraget til integralet av x på kvar side av y-aksen ha same absoluttverdi og motsatt forteikn sånn at integralet vert 0. Me står då igjen med $3\iint_D dA$ som jo berre er tre gonger arealet av D, halvparten av ein disk med radius 2. Altså er svaret

$$\iint_D (x+3)\,dA = 3\iint_D dA = 3\times\frac{\pi 2^2}{2} = 6\pi.$$

14.2.3: Integrasjonen i denne oppgaven er relativt rett frem. Vi integrerer først med hensyn på y, og så med hensyn på x, og ender opp med

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_{-x}^x \cos(y)\,dy\,dx &= \int_0^\pi [\sin(y)]_{-x}^x\,dx\\ &= \int_0^\pi 2\sin(x)\,dx\\ &= [-2\cos(x)]_0^\pi\\ &= 4.\end{aligned}$$

14.2.9:



Figur 2: Det fargede området er det som ligger mellom de to kurvene.

Det første vi må gjøre er å finne skjæringspunktene mellom de to kurvene. Ved å sette likningen $y = x^2$ inn i likningen $x = y^2$ får vi likningen $x = x^4$, eller $x(1-x^3) = 0$. Denne har løsningene $x = 0$ og $x = 1$, som svarer til henholdsvis $y = 0$ og $y = 1$. Skjæringspunktene er derfor $(0,0)$ og $(1,1)$. Vi vet også at $x^2 \le \sqrt{x}$ for $0 \le x \le 1$ (se Figur 2), slik at

$$R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

Vi finner derfor

$$\begin{aligned}
\iint_R xy^2\,dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^{5/2} - x^7)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^8\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{7} - \frac{1}{8}\right] \\
&= \frac{3}{56}.
\end{aligned}$$

14.2.26: Hypotenusen i den rettvinklede trekanten kan beskrives ved hjelp av likningen $y = b - \frac{b}{a}x = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Volumet er derfor gitt ved integralet

$$V = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(2 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy\,dx.$$

Det innerste integralet blir

$$\begin{aligned}
\left[\left(2 - \frac{x}{a}\right)y - \frac{1}{2b}y^2\right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} &= b\left(2 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \\
&= \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(2\left(2 - \frac{x}{a}\right) - \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right) \\
&= \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(3 - \frac{x}{a}\right) \\
&= \frac{b}{2}\left(3 - \frac{4}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2\right),
\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}
V &= \frac{b}{2}\int_0^a \left(3 - \frac{4}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2\right) dx \\
&= \frac{b}{2}\left[3x - \frac{2}{a}x^2 + \frac{1}{3a^2}x^3\right]_0^a \\
&= \frac{b}{2}\left[3a - 2a + \frac{1}{3}a\right] \\
&= \frac{2}{3}ab.
\end{aligned}$$

14.3.3: Siden funksjonen er positiv, kan vi integrere i hvilken rekkefølge vi vil.

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{y}{1+x^2}\,dA &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 \frac{y}{1+x^2}\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

14.3.14: Vi finner volumet ved å integrere høyden $z = z(x, y)$ over integrasjonsområdet S

$$\begin{aligned}V &= \iint_S z\,dA = \int_0^1\int_0^1 \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left[y\ln(x^2+y^2)\right]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 y\left(\ln(1+y^2) - \ln y^2\right) dy \\ &= \frac{1}{2}\left[(1+y^2)\left(\ln(1+y^2)-1\right) - \left(y^2\left(\ln y^2 - 1\right)\right)\right]_0^1 \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Merk at vi har brukt grensen $\lim_{y\to 0} y\ln y = 0$ i den siste overgangen.

En alternativ, kanskje enklere, måte løse denne oppgaven er å bruke observasjonen om integrasjonsområdet T fra Oppgave 14.3.13.

14.3.22: Me skal finna gjennomsnittsverdien av ein funksjon $f = f(x, y)$ i det todimensjonale domenet D, definert som

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{arealet av } D}\iint_D f(x,y)\,dA.$$

I dette tilfellet er D rektangelet gitt ved $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, der me må anta at $a < b$ og $c < d$ for at me i det heile tatt skal ha eit areal å snakka om. Arealet er då ganske enkelt $(b-a)(d-c)$. Sidan $f(x, y) = x^2$ finn me at integralet vert

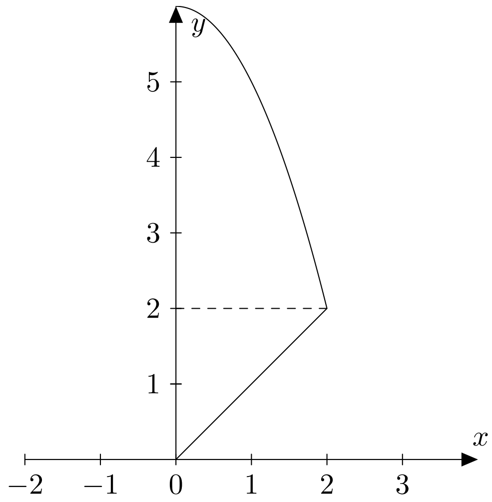
$$\iint_D x^2\,dA = \int_a^b x^2\,dx \int_c^d dy = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b \times \left.y\right|_c^d = \frac{(b^3-a^3)(d-c)}{3}.$$

Dermed finn me at gjennomsnittsverdien av $f(x, y) = x^2$ på D er

$$\bar{f} = \frac{(b^3-a^3)(d-c)}{3(b-a)(d-c)} = \frac{b^2+ba+a^2}{3},$$

der ein i siste overgang har brukt $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ba+a^2)$.

Review Exercise 14.6:



Figur 3: Integrasjonsområdet i oppgaven.

Det første vi gjør er å skissere området som det integreres over. Området under den stiplede linjen i Figur 3 svarer til det første integralet, mens området over den stiplede linjen svarer til det andre integralet. Merk at $x = \sqrt{6-y}$ er ekvivalent med $y = 6 - x^2$ for $x \geq 0$. Vi ser av figuren at området er gitt ved

$$0 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq 6 - x^2,$$

slik at

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^6 \int_0^{\sqrt{6-y}} f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_x^{6-x^2} f(x,y)\,dy\,dx. \end{aligned}$$