Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 4

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

12.5.2: Vi ønsker å partiellderivere $f(x, y, z)$ med hensyn på t, når $x = g(s)$, $y = h(s, t)$, og $z = k(t)$. Generelt har vi fra kjerneregelen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

I dette tilfellet er $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$, og $\frac{\partial z}{\partial t} = k'$. Vi setter inn dette, og oppnår

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t} + k'\frac{\partial f}{\partial z}.$$

12.5.4: Vi lar

$$w = f(x, y) \qquad x = g(r, s) \qquad y = h(r, t) \qquad r = k(s, t) \qquad s = m(t).$$

Da blir

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial t}\right) + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial m}{\partial t}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t}\right).$$

12.6.4: Vi finner først lineariseringen i punktet $(2, 2)$. Vi har at

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -24\frac{2x + y}{(x^2 + xy + y^2)^2} \\ f_y(x, y) &= -24\frac{2y + x}{(x^2 + xy + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Lineariseringen er derfor

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(2, 2) + f_x(2, 2)(x - 2) + f_y(2, 2)(y - 2) \\ &= 2 - (x - 2) - (y - 2), \end{aligned}$$

og vi får approksimasjonen

$$\begin{aligned} f(2{,}1; 1{,}8) \approx L(2, 2) &= 2 - 0{,}1 + 0{,}2 \\ &= 2{,}1. \end{aligned}$$

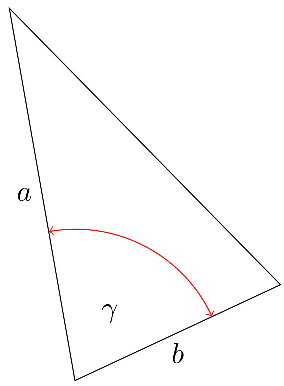
12.6.14: Vi har oppgitt lengdene a og b til to sider og vinkelen γ mellom disse, og ønsker å finne arealet av den resulterende trekanten, se Figur 1. Én formel for dette er

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

som med våre mål gir, i kvadratmeter,

$$A = \frac{1}{2}224 \cdot 158 \sin\frac{64\pi}{180} \approx 15905.$$

For å finne prosentvis maksimal feil gitt måleunøyaktighetene, kan vi bruke linearisering av



Figur 1: Trekant med to kjente sider og én vinkel

funksjonen i målepunktet, og se på forskjellen. Linearisering nær (a, b, γ) av arealfunksjonen over er gitt ved

$$\begin{aligned} L(x,y,\alpha) = A(a,b,\gamma) &+ \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial x}\right|_{(a,b,\gamma)}(x-a) \\ &+ \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial y}\right|_{(a,b,\gamma)}(y-b) + \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{(a,b,\gamma)}(\alpha-\gamma). \end{aligned}$$

Med den aktuelle funksjonen får vi

$$L(x,y,\alpha) = \frac{1}{2}\left(ab\sin\gamma + b(x-a)\sin\gamma + a(y-b)\sin\gamma + ab(\alpha-\gamma)\cos\gamma\right).$$

Vi ser av funksjonen at den, i det området vi er interesserte i, øker (og synker) med økende (og synkende) x, y, og α, så det er tilstrekkelig å se på når alle disse tre er enten maksimale eller minimale for å finne prosentvis maksimal feil. For alle tre minimale får vi

$$L\left(223{,}6; 157{,}6; \frac{62\pi}{180}\right) \approx 15557$$

som gir prosentvis feil

$$\frac{15557 - 15905}{15905} \approx -2{,}2\%$$

For alle tre maksimale får vi

$$L\left(224{,}4; 158{,}4; \frac{66\pi}{180}\right) \approx 16236$$

som gir prosentvis feil
$$\frac{16236 - 15905}{15905} = 2{,}9\%$$
Dermed er maksimal prosentvis feil omtrent 2,9%.

12.6.18:

Vi bruker definisjonen av Jacobi–matrisen, og får
$$D\mathbf{f}(R,\phi,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & R\cos\phi\cos\theta & -R\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & R\cos\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -R\sin\phi & 0 \end{bmatrix}.$$

12.7.4: Vi har funksjonen gitt ved $f(x,y) = e^{xy}$ og punktet $(2,0)$.

a) Gradienten til en funksjon i to variable er gitt ved
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
i dette tilfellet
$$\nabla f(x,y) = \left(ye^{xy}, xe^{xy}\right).$$
Evaluert i $(2,0)$ får vi dermed
$$\nabla f(2,0) = (0,2).$$

b) Tangentplanet til grafen $z = f(x,y)$ til funksjonen i et gitt punkt står normalt på gradientvektoren i dette punktet, slik at det vil være gitt av likningen
$$z = f(2,0) + \nabla f(2,0)\cdot(x-2, y-0),$$
som, ved å gange ut prikkproduktet, gir
$$z - 2y - 1 = 0.$$

c) For å finne likningen for den rette linjen som tangerer nivåkurven[1] finner vi først en likning for nivåkurven som går gjennom punktet vårt. Denne er gitt ved
$$e^{xy} = f(x,y) = f(2,0) = 1,$$
eller
$$xy = 0,$$
som altså er unionen av koordinataksene, og har tangentlinje gjennom $(2,0)$ gitt ved likningen
$$y = 0.$$

[1] Se nederst på side 724 i boka for en forklaring av forskjellen mellom det vi finner i **b)** og **c)**.

12.7.14: Vi har $f(x,y) = \ln|\mathbf{r}|$, hvor $\mathbf{r} = (x,y)$, og skal finne gradienten til denne. Vi kan skrive om funksjonen for å gjøre det enklere først:

$$f(x,y) = \ln|\mathbf{r}| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right).$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\\ &= \frac{(x,y)}{x^2+y^2}\\ &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2},\end{aligned}$$

ved bruk av kjerneregelen.

12.8.4: Definér funksjonen f ved $f(x,y,z) = e^{yz} - x^2 z\ln(y) - \pi$ for $x \in \mathbb{R}, y \in (0,\infty), z \in \mathbb{R}$. Da svarer likningen til $f(x,y,z) = 0$. Anta at (x_0, y_0, z_0) tilfredstiller likningen. Da sier det implisitte funksjonsteorem at det finnes en løsning $y(x,z)$ i en omegn av punktet, så lenge

$$\partial_y f(x_0,y_0,z_0) = z_0\left(e^{y_0 x_0} - \frac{x_0^2}{y_0}\right) \neq 0,$$

som er ekvivalent med at

$$z_0 \neq 0 \quad \text{og} \quad y_0 e^{y_0 x_0} \neq x_0^2.$$

For en slik løsning $y(x,z)$ av likningen kan vi derivere likningen

$$f(x, y(x,z), z) = 0$$

med hensyn på z og få

$$\left(\partial_z y z + y\right) e^{yz} - x^2\ln(y) - x^2 z\frac{1}{y}\partial_z y = 0,$$

eller

$$\partial_z y = \frac{x^2 y\ln(y) - y^2 e^{yz}}{yze^{yz} - x^2 z}.$$

12.8.14: Definér funksjonene f og g ved $f(x,y,r,s) = x - r^2 - 2s$ og $g(x,y,r,s) = y + 2r - s^2$. Da svarer likningene til $f(x,y,r,s) = 0$ og $g(x,y,r,s) = 0$. Vi trenger nå jacobideterminanten

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f,g)}{\partial(r,s)} &= \begin{vmatrix} f_r & f_s \\ g_r & g_s\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -2r & -2 \\ 2 & -2s\end{vmatrix}\\ &= 4(1+rs).\end{aligned}$$

Det implisitte funksjonsteorem sier nå at det vil finnes en løsning $r(x, y)$, $s(x, y)$ i en omegn av (x_0, y_0, r_0, s_0), der $x_0 = r_0^2 + 2s_0$ og $y_0 = s_0^2 - 2r_0$, så lenge denne determinanten ikke er null, altså når $r_0 s_0 \neq -1$. Ved å ta gradienten av de to likningene finner vi

$$2r\nabla r + 2\nabla s = (1, 0), \tag{1}$$
$$2s\nabla s - 2\nabla r = (0, 1), \tag{2}$$

som er ekvivalent med

$$\begin{aligned} s \cdot (1) - (2) : &\qquad 2rs\nabla r + 2\nabla r = (s, -1), \\ (1) + r \cdot (2) : &\qquad 2\nabla s + 2rs\nabla s = (1, r). \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\nabla r = \frac{(s, -1)}{2(1 + rs)}, \quad \nabla s = \frac{(1, r)}{2(1 + rs)},$$

eller, skrevet ut,

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \frac{s}{2(1 + rs)}, & \partial_x s &= \frac{1}{2(1 + rs)}, \\ \partial_y r &= -\frac{1}{2(1 + rs)}, & \partial_y s &= \frac{r}{2(1 + rs)}. \end{aligned}$$

Alternativt kan man regne med differensialer. De to likningene gir

$$\begin{aligned} 2r\,dr + 2\,ds &= dx, \\ -2\,dr + 2s\,ds &= dy. \end{aligned}$$

Dette er et lineært likningssystem for dr og ds, som kan løses (entydig) på samme måte som vi løste (1) og (2). Merk at determinanten til systemet er jacobideterminanten $\partial(f, g)/\partial(r, s)$. Vi ender opp med

$$\begin{aligned} dr &= \frac{s}{2(1 + rs)}\,dx - \frac{1}{2(1 + rs)}\,dy, \\ ds &= \frac{1}{2(1 + rs)}\,dx + \frac{r}{2(1 + rs)}\,dy, \end{aligned}$$

som gir de samme deriverte som vi fant over.

Review exercise 12.4: Vi har funksjonen f definert ved delt forskrift:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{hvis } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{hvis } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Vi undersøker om de første partiellderiverte eksisterer i $(0, 0)$ ved å bruke grenseverdidefinisjonen av de partiellderiverte i $(0, 0)$ direkte.

Vi begynner med den partiellderiverte med hensyn på første argument

$$\begin{aligned} f_1(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2 + 0} - 0}{h} = 1. \end{aligned}$$

Tilsvarende, for andre argument,

$$\begin{aligned} f_2(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{0+h^2}-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Grensene eksisterer, dermed har vi funnet $f_1(0,0)$ og $f_2(0,0)$.

For å kunne vurdere om de høyereordens partiellderiverte eksisterer i $(0,0)$, må vi finne de førsteordens partiellderiverte i et vilkårlig punkt $(x,y) \neq (0,0)$.

For å gjøre dette bruker vi kvotientregelen.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ f_2(x,y) &= -\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \end{aligned}$$

hvor vi i $(0,0)$ har grenseverdiene beregnet over.

Igjen må vi bruke grenseverdidefinisjonen for å vurdere om $f_{21}(0,0)$ og $f_{12}(0,0)$ eksisterer.

$$\begin{aligned} f_{21}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_2(0+h,0)-f_2(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{\left(h^2+0\right)^2}-0}{h} = 0, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f_{12}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(0,0+h)-f_1(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0+0}{h^4}-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h}, \end{aligned}$$

som ikke eksisterer.