



Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

12.5.2: Vi ønsker å partiellderivere $f(x, y, z)$ med hensyn på t , når $x = g(s)$, $y = h(s, t)$, og $z = k(t)$. Generelt har vi fra kjerneregelen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}.$$

I dette tilfellet er $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$, og $\frac{\partial z}{\partial t} = k'$. Vi setter inn dette, og oppnår

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t} + k' \frac{\partial f}{\partial z}.$$

12.5.4: Vi lar

$$w = f(x, y) \quad x = g(r, s) \quad y = h(r, t) \quad r = k(s, t) \quad s = m(t).$$

Da blir

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \left(\frac{\partial k}{\partial s} \frac{dm}{dt} + \frac{\partial k}{\partial t} \right) + \frac{\partial g}{\partial s} \frac{dm}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial k}{\partial s} \frac{dm}{dt} + \frac{\partial k}{\partial t} \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \right).$$

12.6.4: Vi finner først lineariseringen i punktet $(2, 2)$. Vi har at

$$f_x(x, y) = -24 \frac{2x + y}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$
$$f_y(x, y) = -24 \frac{2y + x}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

Lineariseringen er derfor

$$L(x, y) = f(2, 2) + f_x(2, 2)(x - 2) + f_y(2, 2)(y - 2)$$
$$= 2 - (x - 2) - (y - 2),$$

og vi får approksimasjonen

$$f(2, 1; 1, 8) \approx L(2, 2) = 2 - 0,1 + 0,2$$
$$= 2,1.$$

12.6.18:

Vi bruker definisjonen av Jacobi-matrisen, og får

$$D\mathbf{f}(R, \phi, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & R \cos \phi \cos \theta & -R \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & R \cos \phi \sin \theta & R \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -R \sin \phi & 0 \end{bmatrix}.$$

12.7.4: Vi har funksjonen gitt ved $f(x, y) = e^{xy}$ og punktet $(2, 0)$.

a) Gradienten til en funksjon i to variable er gitt ved

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

i dette tilfellet

$$\nabla f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy}).$$

Evaluert i $(2, 0)$ får vi dermed

$$\nabla f(2, 0) = (0, 2).$$

b) Tangentplanet til grafen $z = f(x, y)$ til funksjonen i et gitt punkt står normalt på gradientvektoren i dette punktet, slik at det vil være gitt av likningen

$$z = f(2, 0) + \nabla f(2, 0) \cdot (x - 2, y - 0),$$

som, ved å gange ut prikkproduktet, gir

$$z - 2y - 1 = 0.$$

c) For å finne likningen for den rette linjen som tangerer nivåkurven¹ finner vi først en likning for nivåkurven som går gjennom punktet vårt. Denne er gitt ved

$$e^{xy} = f(x, y) = f(2, 0) = 1,$$

eller

$$xy = 0,$$

som altså er unionen av koordinataksene, og har tangentlinje gjennom $(2, 0)$ gitt ved likningen

$$y = 0.$$

12.7.14: Vi har $f(x, y) = \ln |\mathbf{r}|$, hvor $\mathbf{r} = (x, y)$, og skal finne gradienten til denne. Vi kan skrive om funksjonen for å gjøre det enklere først:

$$f(x, y) = \ln |\mathbf{r}| = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2).$$

¹Se nederst på side 724 i boka for en forklaring av forskjellen mellom det vi finner i b) og c).

Dermed får vi

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2},\end{aligned}$$

ved bruk av kjerneregelen.

12.8.4: Definér funksjonen f ved $f(x, y, z) = e^{yz} - x^2 z \ln(y) - \pi$ for $x \in \mathbb{R}, y \in (0, \infty), z \in \mathbb{R}$. Da svarer likningen til $f(x, y, z) = 0$. Anta at (x_0, y_0, z_0) tilfredstiller likningen. Da sier det implisitte funksjonsteorem at det finnes en løsning $y(x, z)$ i en omegn av punktet, så lenge

$$\partial_y f(x_0, y_0, z_0) = z_0 \left(e^{y_0 x_0} - \frac{x_0^2}{y_0} \right) \neq 0,$$

som er ekvivalent med at

$$z_0 \neq 0 \quad \text{og} \quad y_0 e^{y_0 x_0} \neq x_0^2.$$

For en slik løsning $y(x, z)$ av likningen kan vi derivere likningen

$$f(x, y(x, z), z) = 0$$

med hensyn på z og få

$$(\partial_z y z + y) e^{yz} - x^2 \ln(y) - x^2 z \frac{1}{y} \partial_z y = 0,$$

eller

$$\partial_z y = \frac{x^2 y \ln(y) - y^2 e^{yz}}{y z e^{yz} - x^2 z}.$$

12.8.14: Definér funksjonene f og g ved $f(x, y, r, s) = x - r^2 - 2s$ og $g(x, y, r, s) = y + 2r - s^2$. Da svarer likningene til $f(x, y, r, s) = 0$ og $g(x, y, r, s) = 0$. Vi trenger nå jacobideterminanten

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f, g)}{\partial(r, s)} &= \begin{vmatrix} f_r & f_s \\ g_r & g_s \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2r & -2 \\ 2 & -2s \end{vmatrix} \\ &= 4(1 + rs).\end{aligned}$$

Det implisitte funksjonsteorem sier nå at det vil finnes en løsning $r(x, y), s(x, y)$ i en omegn av (x_0, y_0, r_0, s_0) , der $x_0 = r_0^2 + 2s_0$ og $y_0 = s_0^2 - 2r_0$, så lenge denne determinanten ikke er null, altså når $r_0 s_0 \neq -1$. Ved å ta gradienten av de to likningene finner vi

$$2r \nabla r + 2 \nabla s = (1, 0), \quad (1)$$

$$2s \nabla s - 2 \nabla r = (0, 1), \quad (2)$$

som er ekvivalent med

$$\begin{aligned} s \cdot (1) - (2) : & & 2rs\nabla r + 2\nabla r &= (s, -1), \\ (1) + r \cdot (2) : & & 2\nabla s + 2rs\nabla s &= (1, r). \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\nabla r = \frac{(s, -1)}{2(1+rs)}, \quad \nabla s = \frac{(1, r)}{2(1+rs)},$$

eller, skrevet ut,

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \frac{s}{2(1+rs)}, & \partial_x s &= \frac{1}{2(1+rs)}, \\ \partial_y r &= -\frac{1}{2(1+rs)}, & \partial_y s &= \frac{r}{2(1+rs)}. \end{aligned}$$

Alternativt kan man regne med differensialer. De to likningene gir

$$\begin{aligned} 2r dr + 2 ds &= dx, \\ -2 dr + 2s ds &= dy. \end{aligned}$$

Dette er et lineært likningssystem for dr og ds , som kan løses (entydig) på samme måte som vi løste (1) og (2). Merk at determinanten til systemet er jacobideterminanten $\partial(f, g)/\partial(r, s)$. Vi ender opp med

$$\begin{aligned} dr &= \frac{s}{2(1+rs)} dx - \frac{1}{2(1+rs)} dy, \\ ds &= \frac{1}{2(1+rs)} dx + \frac{r}{2(1+rs)} dy, \end{aligned}$$

som gir de samme deriverte som vi fant over.

Review exercise 12.4: Vi har funksjonen f definert ved delt forskrift:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{hvis } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{hvis } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Vi undersøker om de første partiellderiverte eksisterer i $(0, 0)$ ved å bruke grenseverdidedefinisjonen av de partiellderiverte i $(0, 0)$ direkte.

Vi begynner med den partiellderiverte med hensyn på første argument

$$\begin{aligned} f_1(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+0} - 0}{h} = 1. \end{aligned}$$

Tilsvarende, for andre argument,

$$\begin{aligned} f_2(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0+h^2} - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Grensene eksisterer, dermed har vi funnet $f_1(0,0)$ og $f_2(0,0)$.

For å kunne vurdere om de høyereordens partiellderiverte eksisterer i $(0,0)$, må vi finne de førsteordens partiellderiverte i et vilkårlig punkt $(x,y) \neq (0,0)$.

For å gjøre dette bruker vi kvotientregelen.

$$f_1(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_2(x,y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

hvor vi i $(0,0)$ har grenseverdiene beregnet over.

Igjen må vi bruke grenseverdidefinisjonen for å vurdere om $f_{21}(0,0)$ og $f_{12}(0,0)$ eksisterer.

$$f_{21}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(0+h,0) - f_2(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{(h^2+0)^2} - 0}{h} = 0,$$

og

$$f_{12}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(0,0+h) - f_1(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0+0}{h^4} - 1}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{h},$$

som ikke eksisterer.