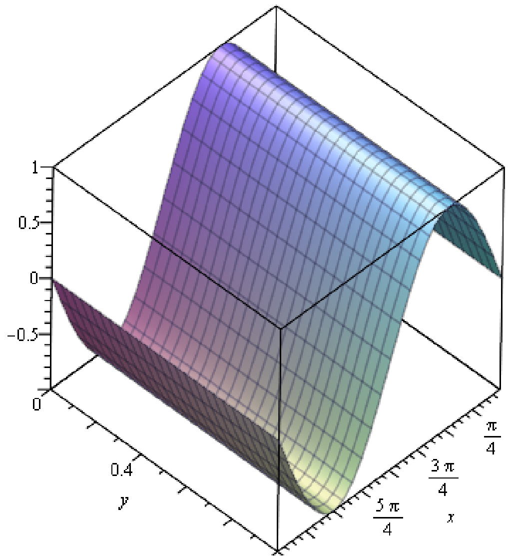
Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

12.1.12: Grafen til $f(x, y) = \sin(x)$ for $x \in [0, 2\pi]$ og $y \in [0, 1]$ er gitt i Figur 1.



Figur 1: Grafen i oppgave 12.1.12.

hei **12.1.40:** Funksjonen f tar bare ikke-negative verdier. Vi ønsker derfor å se på nivåflaten som svarer til $f(x, y, z) = c^2$, der $c \geq 0$. Likningen

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = c^2$$

kan skrives om til

$$x^2 + y^2 = c^2 z^2,$$

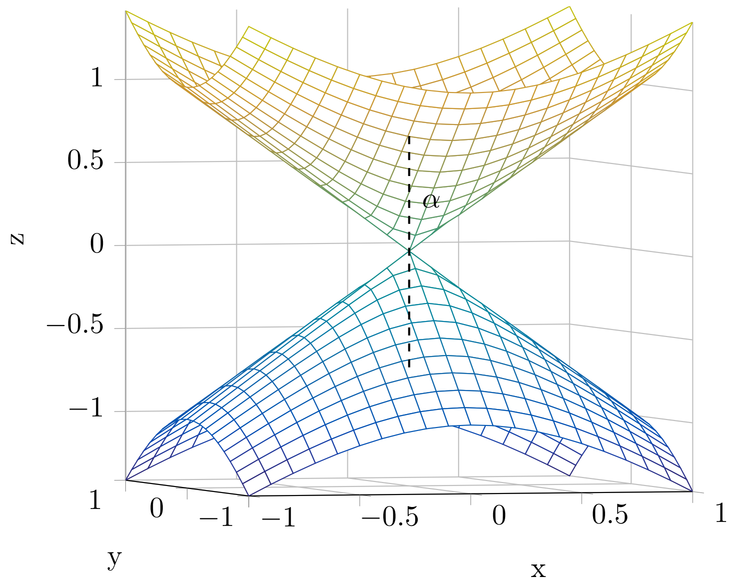
eller

$$r = c|z|$$

i sylinderkoordinater. Nivåflatene er derfor sirkulære kjegler (uten origo, som ikke er i domenet til f) med akse langs z-aksen. Konstanten c bestemmer vinkelen α mellom kjeglen og z-aksen. Nærmere bestemt er denne gitt ved

$$\alpha = \arctan(c).$$

Spesialtilfellet $c = 0$ svarer til en rett linje.



Figur 2: Nivåflaten som svarer til $c = 1$.

12.2.6: Merk at dersom vi fikserer enten $x = 0$ eller $y = 1$ ser vi at eneste mulige kandidat for grensen er 0. Derfor prøver vi å vise at grensen er nettopp dette.

Observer at hvis a og b er to tall har man alltid at

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

som følger av at $(a - b)^2 \geq 0$. Ved å velge $a = x$ og $b = y - 1$ har vi dermed at

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} \\ &\leq \frac{1}{4}\frac{(x^2 + (y-1)^2)^2}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}(x^2 + (y-1)^2), \end{aligned}$$

som klart går mot 0 når $(x, y) \to (0, 1)$.

(Alternativt kan man for eksempel bruke at $x^2 \leq x^2 + (y - 1)^2$, men denne teknikken er verdt å kjenne til).

12.2.9: Det aner oss at grensen ikke eksisterer. Vi prøver derfor å se på hva uttrykket går mot langs ulike linjer på formen $y = ax$ gjennom origo. Vi har

$$\frac{\sin(x(ax))}{x^2 + (ax)^2} = \frac{a}{1 + a^2}\frac{\sin(ax^2)}{ax^2},$$

og dermed

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=ax}} = \frac{a}{1 + a^2},$$

der vi har brukt den velkjente grensen $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$. Siden uttrykket går mot forskjellige verdier (hele intervallet $[-1/2, 1/2]$) avhengig av hvilken linje vi velger eksisterer ikke grensen. *Merk: Om vi ønsker å vise at en grense eksisterer er det* ikke *nok å sjekke at grensene langs hver linje eksisterer og er like!*

12.3.5: Vi ønsker å finne de første ordens deriverte til funksjonen f definert ved $f(x, y) = \arctan(y/x)$. Først finner vi den deriverte med hensyn på x, ved å betrakte y som en konstant. Vi bruker kjerneregelen:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= -\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Spesielt er

$$\partial_x f(-1,1) = -\frac{1}{2}.$$

På tilsvarende måte finner vi

$$\begin{aligned}\partial_y f(x,y) &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

og

$$\partial_y f(-1,1) = -\frac{1}{2}.$$

12.3.14 Vi finner først de partiellderiverte:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= \frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} \\ &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\ \partial_y f(x,y) &= -\frac{2x}{(x+y)^2}.\end{aligned}$$

Fra dette finner vi $f_x(1,1) = 1/2$ og $f_y(1,2) = -1/2$. Merk også at $f(1,1) = 0$. Tangentplanet inneholder dermed punktet $(1,1,0)$ og har normalvektor $(1,-1,-2)$ (skalert opp for å få heltall). Derfor blir

$$\begin{aligned}((x,y,z)-(1,1,0))\cdot(1,-1,-2) &= 0 \\ x-y-2z &= 0\end{aligned}$$

likningen til tangentplanet i punktet $(1,2)$.

Normallinjen går gjennom $(1,1,0)$, og har retningsvektor lik normalvektoren til tangentplanet. Den kan derfor parametriseres som

$$(x,y,z) = (1,1,0) + t(1,-1,-2), \quad t \in \mathbb{R},$$

eller beskrives ved hjelp av likningene

$$x-1 = 1-y = -\frac{z}{2}.$$

12.4.6: Vi regner først ut den førstederiverte til f med hensyn på x, og finner

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y\cos(xy)}{1+\sin(xy)},$$

som vi så bruker for å regne ut

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y) &= \frac{-y^2\sin(xy)(1+\sin(xy)) - y^2\cos(xy)^2}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{-y^2(\sin(xy) + \overbrace{\sin(xy)^2 + \cos(xy)^2}^{=1})}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= -\frac{y^2}{1+\sin(xy)}, \\
\partial_{yx} f(x,y) &= \frac{(\cos(xy) - xy\sin(xy))(1+\sin(xy)) - xy\cos(xy)^2}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{(\cos(xy) - xy)(1+\sin(xy))}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{\cos(xy) - xy}{1+\sin(xy)}.
\end{aligned}$$

Vi kan nå spare oss selv arbeid ved å observere at x og y spiller samme rolle i f. Vi kan derfor finne de deriverte med hensyn på y ved å bytte om på x og y over. I tillegg vet vi at $f_{xy} = f_{yx}$ fra Teorem 1 på side 691 i boken. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
\partial_y f(x,y) &= \frac{x\cos(xy)}{1+\sin(xy)}, \\
\partial_{yy} f(x,y) &= -\frac{x^2}{1+\sin(xy)}, \\
\partial_{xy} f(x,y) &= \frac{\cos(xy) - xy}{1+\sin(xy)}.
\end{aligned}$$

12.4.17: Me skal visa at funksjonen

$$u(x,t) = t^{-1/2}e^{-x^2/4t}$$

oppfyller den partielle differensiallikninga

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kjent som den eindimensjonale varmelikninga/diffusjonslikninga. Her kan $u(x,t)$ til dømes representera temperaturen i eit punkt x ved tida t. Me ser berre på $t > 0$ ettersom $u(x,t)$ ikkje er definert for $t \leq 0$.

Me startar med å partiellderivera med omsyn på t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} t^{-1/2}\right) e^{-x^2/4t} + t^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-x^2/4t}\right) \\
&= -(1/2)t^{-3/2}e^{-x^2/4t} + t^{-1/2}e^{-x^2/4t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - x^2/4t\right) \\
&= -(1/2)t^{-3/2}e^{-x^2/4t} + t^{-1/2}e^{-x^2/4t}(x^2/4t^2) \\
&= -(1/2)t^{-3/2}e^{-x^2/4t} + (1/4)x^2t^{-5/2}e^{-x^2/4t}.
\end{aligned}$$

Deretter finn me den partiellderiverte med omsyn på x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= t^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2/4t}\right)\\ &= t^{-1/2}e^{-x^2/4t}\left(\frac{\partial}{\partial x}-x^2/4t\right)\\ &= t^{-1/2}e^{-x^2/4t}\,(-x/2t)\\ &= -(1/2)xt^{-3/2}e^{-x^2/4t}.\end{aligned}$$

Frå dette uttrykket finn me

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -(1/2)t^{-3/2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)e^{-x^2/4t}+x\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2/4t}\right)\right)\\ &= -(1/2)t^{-3/2}\left(e^{-x^2/4t}-(1/2)x^2t^{-1}e^{-x^2/4t}\right)\\ &= -(1/2)t^{-3/2}e^{-x^2/4t}+(1/4)x^2t^{-5/2}e^{-x^2/4t},\end{aligned}$$

der me i parantesen i første linje har satt inn for den deriverte av eksponensialuttrykket som me fann ovanfor. Av dette ser me at $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, så $u(x,t)$ oppfyller varmelikninga.

Ei tolking av løysinga u for dei interesserte: Merk at $u(x,t) > 0$ for alle $t > 0$ og at $u(x,t) \to 0$ i alle punkt x når $t \to \infty$. Når $t \to 0$ har ein òg at $u(x,t) \to 0$, utanom i $x = 0$ der $u(0,t) \to \infty$. Dermed kan ein tolka denne løysinga som at ein startar med «uendeleg høg temperatur» i punktet $x = 0$ og temperatur lik 0 i alle andre punkt. Denne temperaturen vil så fordela seg jamnt utover i rommet ettersom tida går, før den etter «uendeleg lang tid» vil gå mot temperaturen omgjevnadene hadde ved $t = 0$, nemleg 0. Funksjonen $(1/\sqrt{4\pi})u(x,t)$ vert kalla *fundamentalløysinga* til varmelikninga, eller den såkalla «*varmekjernen*» (*heat kernel*), og kan brukast til å finna løysinga av varmelikninga når $u(x,0) = g(x)$ der g er ein gitt funksjon for starttemperaturen.

10.5.4: Ved å fullføra kvadrata ser ein at likninga

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x - 8y = 8$$

kan skrivast som

$$\left(x^2 + 4x + 4\right) - 4 + 4\left(y^2 - 2y + 1 - 1\right) + 9z^2 = 8,$$

som igjen er det same som

$$(x+2)^2 + 4(y-1)^2 + 9z^2 = 16.$$

Me deler på 16 for å normalisera høgresida til 1, og endar opp med

$$\left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right) + \left(\frac{z}{4/3}\right)^2 = 1,$$

som er standardlikninga til ein ellipsoide med sentrum i $(-2, 1, 0)$ og halvaksar 4, 2 og 4/3.

10.5.5: Her har vi

$$\begin{aligned}z &= x^2 + 2y^2\\ &= \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2,\end{aligned}$$

slik at dette er en elliptisk paraboloide sentrert i origo. Når man skal skissere flaten kan det være nyttig å observere at skjæringene med hvert plan $z = h$ (der $h > 0$) er ellipser med halvakser på $\sqrt{h}$ og $\sqrt{h/2}$.