TMA4105 Matematikk 2
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 2

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

11.1.9: Den aktuelle kurven er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t).$$

Hastigheten er simpelthen den tidsderiverte av posisjonen:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-3\sin t, -4\sin t, 5\cos t).$$

Farten er lengden av hastighetsvektoren:

$$\begin{aligned} v(t) = |\,\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{(-3\sin t)^2 + (-4\sin t)^2 + (5\cos t)^2} \\ &= \sqrt{25\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = 5. \end{aligned}$$

Akselerasjonen er den tidsderiverte av hastigheten:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-3\cos t, -4\cos t, -5\sin t) = -\,\mathbf{r}(t)$$

Kurven beskriver en sirkel, med radius 5 og senter $(0,0,0)$, som ligger i planet som inneholder punktene $(3,4,0)$, $(-3,-4,0)$, og $(0,0,5)$.

11.1.16: Fra oppgaveteksten har vi at posisjonen til partikkelen i planet er gitt av

$$\mathbf{r}(t) = \left(x(t), \frac{3}{x(t)}\right),$$

og at partikkelen beveger seg til høyre i planet, det vil si $\frac{dx}{dt} > 0$. Fra kjerneregelen har vi at hastigheten er

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\,\mathbf{r} = \left(\frac{dx}{dt}, -\frac{3}{x^2}\frac{dx}{dt}\right).$$

Farten til partikkelen er gitt av lengden til hastighetsvektoren,

$$v = |\,\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(-\frac{3}{x^2}\frac{dx}{dt}\right)^2} = \left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1 + \frac{9}{x^4}}.$$

Det er opplyst at når partikkelen er i punktet $(x,y) = (2, 3/2)$ så er farten 10. Ved innsetting av $x = 2$ får vi

$$\frac{5}{4}\left|\frac{dx}{dt}\right|\Bigg|_{(2,3/2)} = 10.$$

Dette sammen med opplysningen om at partikkelen går mot høyre gir

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(2,3/2)} = 8, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{(2,3/2)} = -\frac{3}{x^2}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(2,3/2)} = -6. \tag{1}$$

Dermed er hastigheten i dette punktet gitt av vektoren $(8, -6)$, som vi ser har lengde 10.

11.3.5: Vi setter først $x^2 = 4y^2$, slik at $x = \pm 2y$. For at kurven skal gå gjennom punktet $(2, -1, 4)$, så må vi velge $x = -2y$. Vi setter så $y = t$, som gir parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (-2t, t, 4t^2).$$

11.3.9: Vi ser at kurven beskriver skjæringen mellom en paraboloide og et plan, slik at den gir en ellipse i dette planet. Dette forteller oss at vi bør se etter en måte å parametrisere kurven ved hjelp av trigonometriske funksjoner.

Vi begynner med å eliminere z og komplettere kvadratene:

$$2x - 4y - 1 = z = x^2 + y^2,$$

som kan skrives om til

$$-1 = (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4,$$

eller, på standard ellipseform

$$1 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2.$$

For å oppfylle denne likningen kan vi velge $x(t) = 1 + 2\cos t$ og $y(t) = -2 + 2\sin t$. Til slutt finner vi z ved å sette dette inn i likningen for planet, og får

$$z(t) = 2x(t) - 4y(t) - 1 = 2 + 4\cos t + 8 - 8\sin t - 1 = 9 + 4\cos t - 8\sin t.$$

Dette gir parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \left(1 + 2\cos t, -2\left(1 - \sin t\right), 9 + 4\cos t - 8\sin t\right).$$

11.3.17: Kurvelengden s til en parametrisert kurve er gitt ved

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt,$$

så vi deriverer komponentfunksjonene

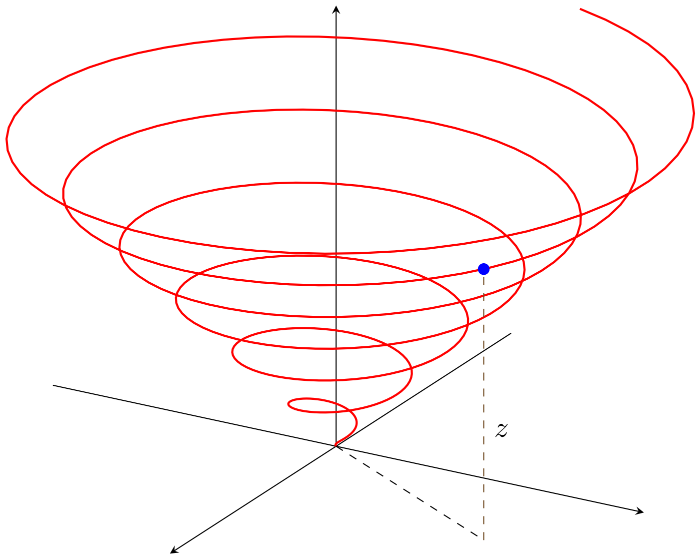
$$\begin{aligned} x(t) &= t\cos t, & x'(t) &= \cos t - t\sin t \\ y(t) &= t\sin t, & y'(t) &= \sin t + t\cos t \\ z(t) &= t, & z'(t) &= 1. \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1 + t^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}\, dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t\sqrt{2+t^2} + \operatorname{arsinh}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= \pi\sqrt{2 + 4\pi^2} + \operatorname{arsinh}(\sqrt{2}\pi), \end{aligned}$$

hvor integralet enten slås opp[1] eller finnes ved delvis integrasjon fulgt av hyperbolsk–trigonometrisk substitusjon.

Denne kurven kalles en konisk helix siden den oppfører seg som en helix, bare på overflaten til en kjegle istedenfor en sylinder, se Figur 1.



Figur 1: En konisk helix

11.3.22: For å løse denne oppgaven er det nyttig å tegne en figur. En kan da overbevise seg om at et fast punkt på hvert tverrsnitt av kabelen, for eksempel senteret eller punktet som berører spolen, gir en kurve som kan beskrives av en sirkulær helix. Disse har parametrisering (etter vilkårlig valg av akser)

$$\mathbf{r}(t) = (c\cos t, c\sin t, d \cdot t).$$

Vi velger senterpunkt av tverrsnittet til kabelen. For å finne koeffisientene c og d, må vi bruke kabelens tverrsnittsradius a og spolens radius b.

Vi kan se direkte at $c = a + b$.

For å finne d ser vi at etter én hel vinding har punktet beveget seg $2a$ i $\mathbf{k}$-retning, vi har også

$$\mathbf{r}(0) = (a+b, 0, 0) \text{ og } \mathbf{r}(2\pi) = (a+b, 0, 2\pi d),$$

dermed er $2a = 2\pi d$, så $d = a/\pi$. Dette gir parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \left((a+b)\cos t, (a+b)\sin t, \frac{a}{\pi}t\right).$$

For å finne ut hvilken lengde av spolen som dekkes av kabelen[2], regner vi først ut buelengden som en funksjon av t

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{a}{\pi}\right)^2}\, dt = \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{a}{\pi}\right)^2}\, t.$$

[1] I ettbindsutgaven finnes dette på innsiden av omslaget bakerst i boka.

[2] Dette er en noe uklar formulering, vi tolker det som høydeforskjellen mellom tilsvarende tverrsnittspunkt på starten og enden av kabelen

Den totale buelengden er den samme som lengden L av kabelen, så ved å finne ved hvilken t denne oppnås, kan vi finne høydeforskjellen. Altså

$$s(t) = \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{a}{\pi}\right)^2}\, t = L \Rightarrow t = \frac{L\pi}{\sqrt{((a+b)\pi)^2 + a^2}}.$$

Siden vi valgte starthøyden til å være 0, er høydeforskjellen nå z-koordinaten til kurven ved denne tiden:

$$h = \frac{a}{\pi} t = \frac{a}{\pi} \frac{L\pi}{\sqrt{((a+b)\pi)^2 + a^2}} = \frac{aL}{\sqrt{((a+b)\pi)^2 + a^2}},$$

som er det endelige svaret[3].

11.4.3: Enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ er normaliseringen av hastighetsvektoren i et gitt punkt. Vi må altså finne både hastighet og fart for den aktuelle kurven, her

$$\mathbf{r}(t) = \left(\cos t \sin t, \sin^2 t, \cos t\right).$$

Vi regner først ut hastigheten

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left(\cos^2 t - \sin^2 t, 2\cos t \sin t, -\sin t\right),$$

og finner så farta

$$\begin{aligned} v(t) = |\,\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)^2 + (2\cos t \sin t)^2 + (-\sin t)^2} \\ &= \sqrt{\cos^4 t - 2\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t + 4\cos^2 t \sin^2 t + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{1 + \sin^2 t} \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \left(\cos^2 t - \sin^2 t, 2\cos t \sin t, -\sin t\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \left(\cos 2t, \sin 2t, -\sin t\right). \end{aligned}$$

11.4.5: Vi skal vise at dersom krumningen κ er 0 overalt, så har vi en rett linje. Vi kan anta at kurven vår, si $\mathbf{r}(s)$, er parametrisert ved buelengden s, slik at enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ i hvert punkt er den samme som hastighetsvektoren.

I dette tilfellet er skalaren $\kappa(t)$ lengden til akselerasjonsvektoren, altså

$$\kappa(t) = |\,\mathbf{a}(t)|.$$

At $\kappa(t)$ er 0 i hvert punkt innebærer dermed at hver komponent, som vi kan kalle a_i, av akselerasjonsvektoren også er 0 i hvert punkt.

[3]Avhengig av hvilket tverrsnittspunkt man velger, vil man kunne få både a og b istedenfor $(a+b)$ i svaret over.

Vi kan nå bruke at a_i er den dobbeltderiverte av r_i, den i'te komponenten av posisjonsvektoren. Ved å integrere $a_i = 0$ to ganger, får vi

$$r_i(s) = c_i + d_i s.$$

Vi konkluderer at

$$\mathbf{r}(s) = (r_1, r_2, r_3) = (c_1 + d_1 s, c_2 + d_2 s, c_3 + d_3 s)\,,$$

som er den generelle likningen for en rett linje i tre dimensjoner (merk at akkurat samme framgangsmåte gjelder uansett antall dimensjoner).

Vi har dermed vist at dersom krumningen er 0 overalt, har vi med en rett linje å gjøre.

11.5.4: En formel for krumningsradiusen κ er

$$\kappa = \frac{|\,\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3},$$

så vi finner hastighet og akselerasjon for vår kurve

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left(3t^2, 2t, 1\right),$$

slik at

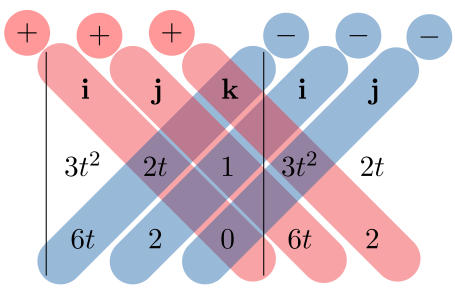
$$v(t) = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4},$$

og

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (6t, 2, 0).$$

For å regne ut kryssproduktet kan man utvikle determinanten som vist i Figur 2, som gir summen

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 6t\,\mathbf{j} + 6t^2\,\mathbf{k} - 12t^2\,\mathbf{k} - 2\,\mathbf{i} = -2\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} - 6t^2\,\mathbf{k}.$$



Figur 2: Utregning av kryssprodukt

Dermed har vi

$$|\,\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = \sqrt{4 + 36t^2 + 36t^4} = 2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}.$$

Til slutt finner vi altså at krumningen, som en funksjon av t, er

$$\kappa(t) = \frac{|\,\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}},$$

i punktet $t = 1$ har vi da

$$\kappa(1) = \left. \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} \right|_{t=1} = \frac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}}.$$

Krumningsradien blir dermed

$$\rho(1) = \frac{1}{\kappa(1)} = \frac{7\sqrt{14}}{\sqrt{19}}.$$