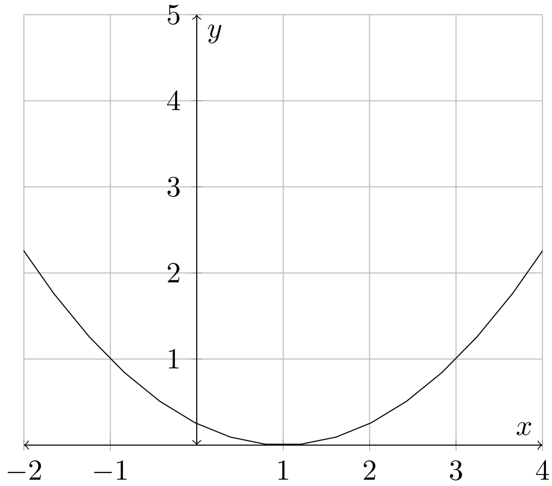
TMA4105 Matematikk 2
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 1

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Alle oppgavenummer refererer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

$\boxed{\text{8.2.1}}$ Ved å løse $x = 1 + 2t$ for t, finner vi et uttrykk vi kan sette inn i $y = t^2$. Vi ser direkte at $t = \frac{1}{2}(x-1)$, slik at $y = \frac{1}{4}(x-1)^2$.



Figur 1: Den parametriske kurven $x = 1 + 2t$, $y = t^2$

$\boxed{\text{8.2.9}}$ Siden $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, har vi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, som er likningen for en astroide, se Figur 2. Legg merke til at kurven er innom alle fire kvadranter, dette er mulig siden potensen er odde i både x og y.

$\boxed{\text{8.3.9}}$ Formelen for stigningstallet til en parametrisert kurve $x = f(t)$, $y = g(t)$ er

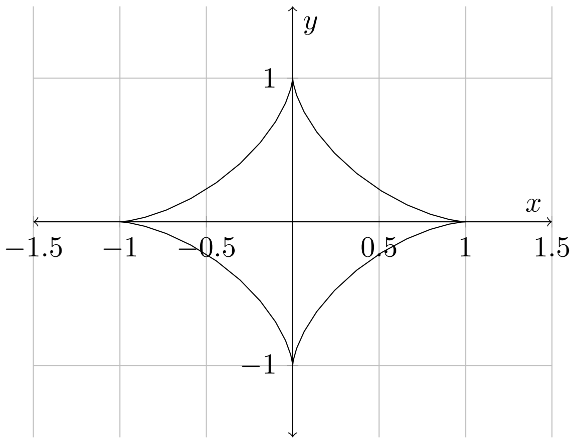
$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

I vårt tilfelle har vi

$$x = f(t) = t^3 + t, \quad f'(t) = 3t^2 + 1,$$

og

$$y = g(t) = 1 - t^3, \quad g'(t) = -3t^2,$$



Figur 2: Den parametriske kurven $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$

og vi skal finne stigningstallet i $t = 1$. Ved innsetting i formelen får vi

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\frac{g'(t)}{f'(t)}\right|_{t=1} = \left.\frac{-3t^2}{1+3t^2}\right|_{t=1} = -\frac{3}{4}.$$

$\boxed{8.3.17}$ Gitt en parameterisert kurve i planet med komponentfunksjoner $x = f(t)$ og $y = g(t)$ så vil denne være glatt i alle punkter t der f og g er kontinuerlige og ikke tar verdien 0 samtidig, jamfør Theorem 1 side 476 i læreboka.

Her har vi $x = t^3$ og $y = t^2$, hvor begge komponentfunksjonenes deriverte er 0 i $t = 0$, slik at den parametriserte kurven ikke nødvendigvis er glatt der. Siden komponentfunksjonene er kontinuerlige og ulike null for alle andre verdier av t er dette det eneste punktet kurven kan være diskontinuerlig.

$\boxed{8.4.5}$ Formelen for kurvelengde er

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

For $x = t^2 \sin t$, $y = t^2 \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, har vi

$$x'(t) = 2t \sin t + t^2 \cos t$$

og

$$y'(t) = 2t \cos t - t^2 \sin t$$

som gir

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= \left(2t \sin t + t^2 \cos t\right)^2 + \left(2t \cos t - t^2 \sin t\right)^2 \\ &= 4t^2 \sin^2 t + 4t^3 \sin t \cos t + t^4 \cos^2 t + 4t^2 \cos^2 t - 4t^3 \sin t \cos t + t^4 \sin^2 t \\ &= t^2 \left(4 + t^2\right) \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 \left(4 + t^2\right)}\, dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{4 + t^2}\, dt.$$

Substitusjonen $u = 4 + t^2$, fulgt av tilbakesubstitusjon for å slippe å beregne nye grenser, gir så

$$L = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} u^{\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(4+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\left(\left(1+\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

$\boxed{8.5.3}$ Ved å multiplisere opp likningen med nevneren på høyre side får vi

$$3r\sin(\theta) - 4r\cos(\theta) = 5,$$

slik at likningen blir

$$3y - 4x = 5$$

i kartesiske koordinater. Dette er en rett linje.

$\boxed{8.5.8}$ Fremgangsmåten likner på den som ble brukt i forrige oppgave. Ved å kvadrere likningen får vi

$$r^2 = \frac{4}{\cos(\theta)^2 + 4\sin(\theta)^2}.$$

Multipliserer vi nå med nevneren finner vi

$$(r\cos(\theta))^2 + 4(r\sin(\theta))^2 = 4,$$

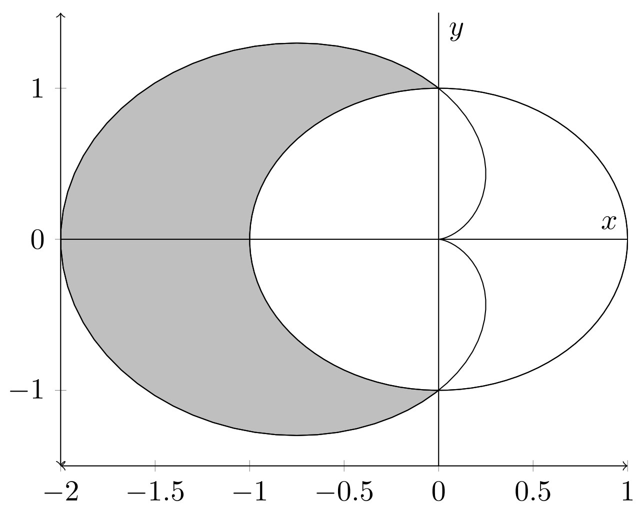
eller

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

i kartesiske koordinater. Siden dette kan skrives som

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$$

beskriver dette en ellipse sentrert i origo, med halvakser på 2 og 1.



$\boxed{8.6.7}$ Likningen $1 - \cos(\theta) = 1$ er ekvivalent med $\cos(\theta) = 0$. De to kurvene skjærer derfor hverandre i punktene $[1, \pi/2] = (0, 1)$ og $[1, 3\pi/2] = (0, -1)$. Siden området vi er ute etter er symmetrisk om x-aksen finner vi

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} ((1 - \cos(\theta))^2 - 1^2)\, d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} - 2\cos(\theta) \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(4\theta) - 2\sin(\theta) \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 2 + \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

der identiteten $\cos(\theta)^2 = (1 + \cos(2\theta))/2$ er brukt.

$\boxed{8.6.12}$ Her er det bare å sette inn i formelen. Siden $f(\theta) = \theta^2$ har vi

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \sqrt{(2\theta)^2 + (\theta^2)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \theta\sqrt{4 + \theta^2}\, d\theta. \end{aligned}$$

Hvis vi nå benytter substitusjonen $u = 4 + \theta^2$ finner vi

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_4^{4+\pi^2} u^{1/2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \left((4 + \pi^2)^{3/2} - 8 \right). \end{aligned}$$