TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 13

Våren 2017

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ La D være området begrenset av x-aksen og halvsirkelen $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$, og la $\mathcal{C}$ være randen til D orientert mot klokken. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, -xy^2).$$

a) Finn $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ved å regne ut linjeintegralet direkte.

b) Finn $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ved å bruke Greens teorem.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{C}$ være den lukkede kurven i xy-planet bestående av linjestykket mellom $(0, 0)$ og $(\pi/2, 0)$, den delen av grafen $y = \cos x$ som er mellom $(\pi/2, 0)$ og $(0, 1)$ samt linjestykket mellom $(0, 1)$ og $(0, 0)$. La $\mathcal{C}$ være orientert mot klokken.

a) Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} (y^2 + x^5 e^{-y^6})\, dx + (x + y - x^6 y^5 e^{-y^6})\, dy.$$

b) La $\mathcal{C}'$ være den krumme delen av $\mathcal{C}$. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}'} (y^2 + x^5 e^{-y^6})\, dx + (x + y - x^6 y^5 e^{-y^6})\, dy.$$

Maple T.A.-oppgaver

$\boxed{1}$ La $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$, og la $\mathcal{C} = \partial D$ være randen til D orientert mot klokken. Regn ut integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin x^2 - y^2)\, dx + (\cos y^2 + 3xy)\, dy$$

ved å bruke Greens teorem.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{C}$ være enhetssirkelen med sentrum i origo, orientert med klokken. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} x\, dx + y\, dy.$$

Ukens nøtt

$\boxed{\text{N}}$ La $f(x, y)$ ha kontinuerlige partiellderiverte av første og andre orden i et område A i xy-planet som er begrenset av en stykkevis glatt, enkel lukket kurve $\mathcal{C}$.

Vis at hvis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

i A, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$