Interaktiv forelesning uke 10

Våren 2017

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (6y, 6x, 8z^2)$.

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt og finn en potensialfunksjon φ.

b) La $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ der $0 \leq t \leq \pi$. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

c) Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$$

der vektorfeltet $\mathbf{H}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved $\mathbf{H}(x, y, z) = (0, x, 0)$.

d) Bruk resultatene ovenfor til å regne ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

der vektorfeltet $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved $\mathbf{G}(x, y, z) = (6y, 5x, 8z^2)$.

$\boxed{2}$ La det konservative vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(e^{xy}(y\cos(xz) - z\sin(xz)), xe^{xy}\cos(xz), 1 - xe^{xy}\sin(xz)\big).$$

Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathcal{C}$ er kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 6\sin^2 t, 5t)$$

der $0 \leq t \leq 2\pi$.

Maple T.A.-oppgaver

$\boxed{1}$ En tråd ligger langs kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

der $0 \leq t \leq 2\pi$. Hva er trådens masse hvis dens massetetthet er gitt ved $\rho(x, y, z) = z$?

$\boxed{2}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (11z, 4y, 2x)$. Regn ut integralet

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der kurven Γ er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ for $0 \leq t \leq 2$.

Ukens nøtt

$\boxed{\text{N}}$ La $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ være to kurver med samme start- og sluttpunkt i $\mathbb{R}^3$, og la $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være et vektorfelt. Vis at

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \iff \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

der $\mathcal{C}$ er den lukkede kurven vi får ved å først gjennomløpe $\mathcal{C}_1$ og deretter $\mathcal{C}_2$ i motsatt retning.