Anbefalte oppgaver - Løsningsforslag

Uke 8

14.1.6: Integralet svarer til volumet som ligger over rektangelet D og under planet $z = 5 - x - y$. Figure 1 viser hvordan vi kan dele opp volumet i to pyramider. Disse vil ha grunnflate i xz- og yz-planet, med "toppen" i punktet $(3, 2, 0)$. Vi finner derfor

$$\begin{aligned}\iint_D (5 - x - y)\, dA &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{2+5}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{3+5}{2}\right) \\ &= 7 + 8 \\ &= 15,\end{aligned}$$

der det første leddet svarer til pyramiden til venstre i figuren, mens det andre svarer til pyramiden til høyre.

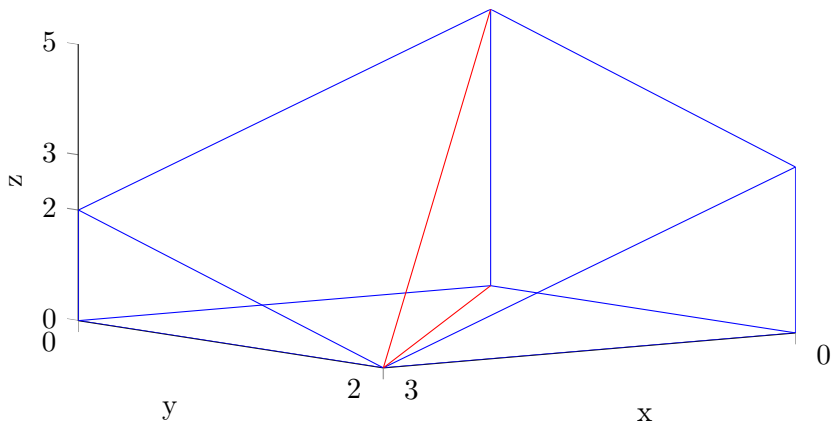

FIGURE 1. Volumet vi er ute etter ligger innenfor de blå linjene. Planet som de røde linjene ligger i deler volumet opp i to pyramider.

14.2.3: Integrasjonen i denne oppgaven er relativt rett frem. Vi integrerer først med hensyn på y, og så med hensyn på x, og ender opp med

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_{-x}^{x} \cos(y)\, dy\, dx &= \int_0^\pi [\sin(y)]_{-x}^{x}\, dx \\ &= \int_0^\pi 2\sin(x)\, dx \\ &= [-2\cos(x)]_0^\pi \\ &= 4.\end{aligned}$$

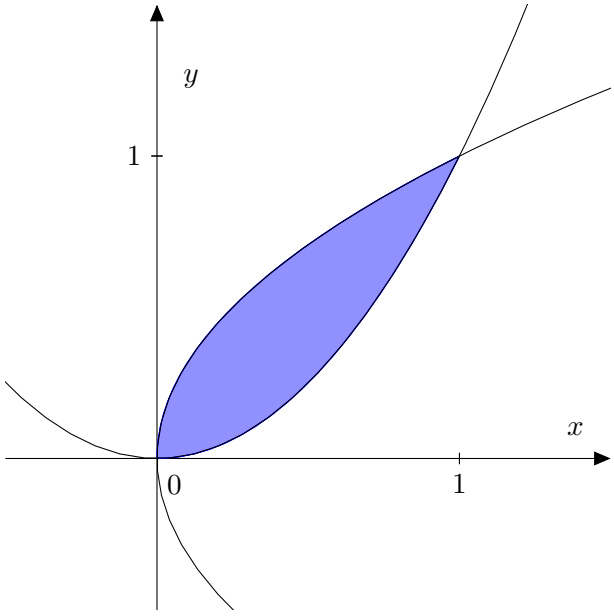

FIGURE 2. Det fargede området er det som ligger mellom de to kurvene.

14.2.9: Det første vi må gjøre er å finne skjæringspunktene mellom de to kurvene. Ved å sette likningen $y = x^2$ inn i likningen $x = y^2$ får vi likningen $x = x^4$, eller $x(1 - x^3) = 0$. Denne har løsningene $x = 0$ og $x = 1$, som svarer til henholdsvis $y = 0$ og $y = 1$. Skjæringspunktene er derfor $(0, 0)$ og $(1, 1)$. Vi vet også at $x^2 \leq \sqrt{x}$ for $0 \leq x \leq 1$ (se Figure 2), slik at

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Vi finner derfor

$$\begin{aligned}
\iint_R xy^2\, dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 x \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^{5/2} - x^7)\, dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^8\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{7} - \frac{1}{8}\right] \\
&= \frac{3}{56}.
\end{aligned}$$

14.2.26: Hypotenusen i den rettvinklede trekanten kan beskrives ved hjelp av likningen $y = b - \frac{b}{a}x = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Volumet er derfor gitt ved integralet

$$V = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(2 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy\, dx.$$

Det innerste integralet blir

$$\begin{aligned}\left[\left(2-\frac{x}{a}\right)y-\frac{1}{2b}y^2\right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} &= b\left(2-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{b}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\\ &= \frac{b}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(2\left(2-\frac{x}{a}\right)-\left(1-\frac{x}{a}\right)\right)\\ &= \frac{b}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(3-\frac{x}{a}\right)\\ &= \frac{b}{2}\left(3-\frac{4}{a}x+\frac{1}{a^2}x^2\right),\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}V &= \frac{b}{2}\int_0^a\left(3-\frac{4}{a}x+\frac{1}{a^2}x^2\right)dx\\ &= \frac{b}{2}\left[3x-\frac{2}{a}x^2+\frac{1}{3a^2}x^3\right]_0^a\\ &= \frac{b}{2}\left[3a-2a+\frac{1}{3}a\right]\\ &= \frac{2}{3}ab.\end{aligned}$$

14.3.3: Siden funksjonen er positiv, kan vi integrere i hvilken rekkefølge vi vil.

$$\begin{aligned}\iint_S\frac{y}{1+x^2}\,dA &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\frac{y}{1+x^2}\,dy\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_{x=-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

14.3.14: Vi finner volumet ved å integrere høyden $z=z(x,y)$ over integrasjonsområdet S

$$\begin{aligned}V &= \iint_S z\,dA=\int_0^1\int_0^1\frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy\\ &= \int_0^1\left[y\ln(x^2+y^2)\right]_0^1dy\\ &= \int_0^1 y\left(\ln(1+y^2)-\ln y^2\right)dy\\ &= \frac{1}{2}\left[(1+y^2)\left(\ln(1+y^2)-1\right)-\left(y^2\left(\ln y^2-1\right)\right)\right]_0^1\\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Merk at vi har brukt grensen $\lim_{y\to 0}y\ln y=0$ i den siste overgangen.

En alternativ, kanskje enklere, måte løse denne oppgaven er å bruke observasjonen om integrasjonsområdet T fra Oppgave 14.3.13.

RE 14.6: Det første vi gjør er å skissere området som det integreres over. Området under den stiplede linjen i Figure 3 svarer til det første integralet, mens området over den stiplede

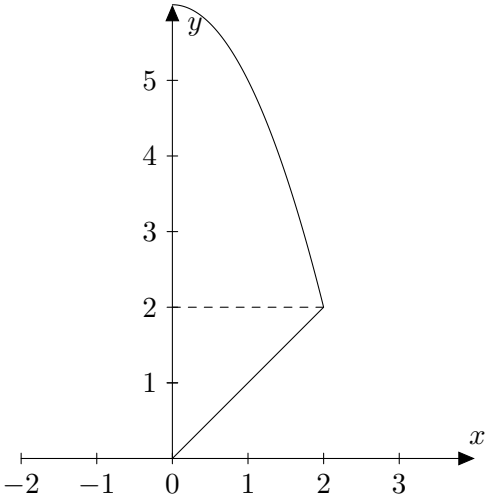

FIGURE 3. Integrasjonsområdet i oppgaven.

linjen svarer til det andre integralet. Merk at $x = \sqrt{6-y}$ er ekvivalent med $y = 6 - x^2$ for $x \geq 0$. Vi ser av figuren at området er gitt ved

$$0 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq 6 - x^2,$$

slik at

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^6 \int_0^{\sqrt{6-y}} f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_x^{6-x^2} f(x,y)\,dy\,dx. \end{aligned}$$