Anbefalte oppgaver - Løsningsforslag

Uke 6

12.6.4: Vi finner først lineariseringen i punktet $(2,2)$. Vi har at

$$f_x(x,y) = -24\frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$$
$$f_y(x,y) = -24\frac{2y+x}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Lineariseringen er derfor

$$L(x,y) = f(2,2) + f_x(2,2)(x-2) + f_y(2,2)(y-2)$$
$$= 2 - (x-2) - (y-2),$$

og vi får approksimasjonen

$$f(2{,}1; 1{,}8) \approx L(2,2) = 2 - 0{,}1 + 0{,}2$$
$$= 2{,}1.$$

12.6.14: Vi har oppgitt lengdene a og b til to sider og vinkelen γ mellom disse, og ønsker å finne arealet av den resulterende trekanten, se Figur 1. Én formel for dette er

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

som med våre mål gir, i kvadratmeter,

$$A = \frac{1}{2}224 \cdot 158 \sin\frac{64\pi}{180} \approx 15905.$$

For å finne prosentvis maksimal feil gitt måleunøyaktighetene, kan vi bruke linearis-

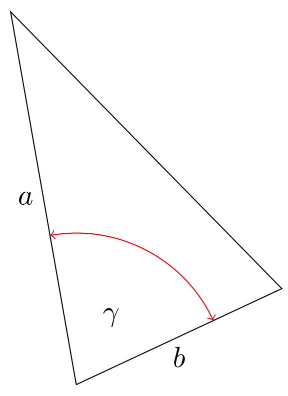

Figure 1. Trekant med to kjente sider og én vinkel

ering av funksjonen i målepunktet, og se på forskjellen. Linearisering nær (a,b,γ) av arealfunksjonen over er gitt ved

$$L(x,y,\alpha) = A(a,b,\gamma) + \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial x}\right|_{(a,b,\gamma)} (x-a) + \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial y}\right|_{(a,b,\gamma)} (y-b) + \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{(a,b,\gamma)} (\alpha-\gamma).$$

Med den aktuelle funksjonen får vi

$$L(x,y,\alpha) = \frac{1}{2}\left(ab\sin\gamma + b(x-a)\sin\gamma + a(y-b)\sin\gamma + ab(\alpha-\gamma)\cos\gamma\right).$$

Vi ser av funksjonen at den, i det området vi er interesserte i, øker (og synker) med økende (og synkende) x, y, og α, så det er tilstrekkelig å se på når alle disse tre er enten maksimale eller minimale for å finne prosentvis maksimal feil. For alle tre minimale får vi

$$L\left(223{,}6; 157{,}6; \frac{62\pi}{180}\right) \approx 15557$$

som gir prosentvis feil

$$\frac{15557 - 15905}{15905} \approx 2{,}2\%$$

For alle tre maksimale får vi

$$L\left(224{,}4; 158{,}4; \frac{66\pi}{180}\right) \approx 16236$$

som gir prosentvis feil

$$\frac{16236 - 15905}{15905} = 2{,}9\%$$

Dermed er maksimal prosentvis feil omtrent 2,9%.

12.6.18: Vi bruker definisjonen av Jacobi–matrisen, og får

$$D\mathbf{f}(R,\phi,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & R\cos\phi\cos\theta & -R\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & R\cos\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -R\sin\phi & 0 \end{bmatrix}.$$

12.7.4: Vi har funksjonen gitt ved $f(x,y) = e^{xy}$ og punktet $(2,0)$.

a) Gradienten til en funksjon i to variable er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j},$$

i dette tilfellet

$$\nabla f(x,y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}.$$

Evaluert i $(2,0)$ får vi dermed

$$\nabla f(2,0) = 2\mathbf{j}.$$

b) Tangentplanet til grafen $z = f(x,y)$ til funksjonen i et gitt punkt står normalt på gradientvektoren i dette punktet, slik at det vil være gitt av likningen

$$z = f(2,0) + \nabla f(2,0) \cdot ((x-2)\mathbf{i} + (y-0)\mathbf{j}),$$

som, ved å gange ut prikkproduktet, gir

$$z - 2y - 1 = 0.$$

c) For å finne likningen for den rette linjen som tangerer nivåkurven[1] finner vi først en likning for nivåkurven som går gjennom punktet vårt. Denne er gitt ved

$$e^{xy} = f(x, y) = f(2, 0) = 1,$$

eller

$$xy = 0,$$

som altså er unionen av koordinataksene, og har tangentlinje gjennom $(2, 0)$ gitt ved likningen

$$y = 0.$$

12.7.14: Vi har $f(x, y) = \ln |\mathbf{r}|$, hvor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, og skal finne gradienten til denne. Vi kan skrive om funksjonen for å gjøre det enklere først:

$$f(x, y) = \ln |\mathbf{r}| = \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + y^2\right).$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \\
&= \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j} \\
&= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2},
\end{aligned}$$

ved bruk av kjerneregelen.

12.8.4: Definér funksjonen f ved $f(x, y, z) = e^{yz} - x^2 z \ln(y) - \pi$ for $x \in \mathbb{R}, y \in (0, \infty), z \in \mathbb{R}$. Da svarer likningen til $f(x, y, z) = 0$. Anta at (x_0, y_0, z_0) tilfredstiller likningen. Da sier det implisitte funksjonsteorem at det finnes en løsning $y(x, z)$ i en omegn av punktet, så lenge

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = z_0 \left(e^{y_0 x_0} - \frac{x_0^2}{y_0}\right) \neq 0,$$

som er ekvivalent med at

$$z_0 \neq 0 \quad \text{og} \quad y_0 e^{y_0 x_0} \neq x_0^2.$$

For en slik løsning $y(x, z)$ av likningen kan vi derivere likningen

$$f(x, y(x, z), z) = 0$$

med hensyn på z og få

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z} z + y\right) e^{yz} - x^2 \ln(y) - x^2 z \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

eller

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x^2 y \ln(y) - y^2 e^{yz}}{yze^{yz} - x^2 z}.$$

[1] Se nederst på side 724 i boka for en forklaring av forskjellen mellom det vi finner i **b)** og **c)**.

12.8.14: Definér funksjonene f og g ved $f(x,y,r,s) = x - r^2 - 2s$ og $g(x,y,r,s) = y + 2r - s^2$. Da svarer likningene til $f(x,y,r,s) = 0$ og $g(x,y,r,s) = 0$. Vi trenger nå jacobideterminanten

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f,g)}{\partial(r,s)} &= \begin{vmatrix} f_r & f_s \\ g_r & g_s \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2r & -2 \\ 2 & -2s \end{vmatrix} \\ &= 4(1+rs).\end{aligned}$$

Det implisitte funksjonsteorem sier nå at det vil finnes en løsning $r(x,y)$, $s(x,y)$ i en omegn av (x_0, y_0, r_0, s_0), der $x_0 = r_0^2 + 2s_0$ og $y_0 = s_0^2 - 2r_0$, så lenge denne determinanten ikke er null, altså når $r_0 s_0 \neq -1$. Ved å ta gradienten av de to likningene finner vi

$$2r\nabla r + 2\nabla s = (1,0), \tag{0.1}$$

$$2s\nabla s - 2\nabla r = (0,1), \tag{0.2}$$

som er ekvivalent med

$$\begin{aligned} s\cdot(0.1) - (0.2): &\qquad 2rs\nabla r + 2\nabla r = (s,-1), \\ (0.1) + r\cdot(0.2): &\qquad 2\nabla s + 2rs\nabla s = (1,r). \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\nabla r = \frac{(s,-1)}{2(1+rs)}, \quad \nabla s = \frac{(1,r)}{2(1+rs)},$$

eller, skrevet ut,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{s}{2(1+rs)}, & \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{1}{2(1+rs)}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= -\frac{1}{2(1+rs)}, & \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{r}{2(1+rs)}. \end{aligned}$$

Alternativt kan man regne med differensialer. De to likningene gir

$$\begin{aligned} 2r\,dr + 2\,ds &= dx, \\ -2\,dr + 2s\,ds &= dy. \end{aligned}$$

Dette er et lineært likningssystem for dr og ds, som kan løses (entydig) på samme måte som vi løste Equation (0.1) og Equation (0.2). Merk at determinanten til systemet er jacobideterminanten $\partial(f,g)/\partial(r,s)$. Vi ender opp med

$$\begin{aligned} dr &= \frac{s}{2(1+rs)}\,dx - \frac{1}{2(1+rs)}\,dy, \\ ds &= \frac{1}{2(1+rs)}\,dx + \frac{r}{2(1+rs)}\,dy, \end{aligned}$$

som gir de samme deriverte som vi fant over.

RE 12.14: Vi ser først på x og z som funksjoner av y. Ved å derivere likningene finner vi[2]

$$F_x\frac{dx}{dy} + F_y + F_z\frac{dz}{dy} = 0 \tag{0.3}$$

$$G_x\frac{dx}{dy} + G_y + G_z\frac{dz}{dy} = 0 \tag{0.4}$$

[2] Det er underforstått at de deriverte til F og G er evaluert i $(x(y), y, z(y))$.

hvorpå

$$G_z \cdot (0.3) - F_z \cdot (0.4): \quad (F_xG_z - F_zG_x)\frac{dx}{dy} + F_yG_z - F_zG_y = 0,$$

og derfor

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_yG_z - F_zG_y}{F_xG_z - F_zG_x}.$$

Ved å bytte om på rollene til variablene x, y, z finner vi også umiddelbart

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{F_zG_x - F_xG_z}{F_yG_x - F_xG_y} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{F_xG_y - F_yG_x}{F_zG_y - F_yG_z}.$$

Vi får dermed

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} &= -\left(\frac{F_yG_z - F_zG_y}{F_xG_z - F_zG_x}\right)\left(\frac{F_zG_x - F_xG_z}{F_yG_x - F_xG_y}\right)\left(\frac{F_xG_y - F_yG_x}{F_zG_y - F_yG_z}\right)\\ &= -(-1)(-1)(-1)\\ &= 1\end{aligned}$$

Alternativ: Siden hver enkelt variabel entydig bestemmer de to andre variablene må vi ha identiteten

$$x(y(z(x))) = x.$$

Her gjelder det å tolke notasjonen riktig. Hvis vi starter helt innerst på venstre side tas det inn en x-verdi x, og $z(x)$ er z-verdien som korresponderer til denne. På samme måte blir $y(z(x))$ den korresponderende y-verdien. Ved å så ta $x(y(z(x)))$ er vi tilbake til utgangspunktet, som gir høyresiden. Vi kan nå derivere begge sider av likningen, og får

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 1$$

fra kjerneregelen.

RE 12.14: Først finner vi at $f(1, -1) = 1$. Vi regner så ut de partiellderiverte

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (2x - 2)f(x, y),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -8yf(x, y),\end{aligned}$$

slik at $f_x(1, -1) = 0$ og $f_y(1, -1) = 8$. Planet skal derfor inneholde punktet $(1, -1, 1)$ og ha normalvektor $(0, 8, -1)$. Dermed blir

$$\begin{aligned}((x, y, z) - (1, -1, 1)) \cdot (0, 8, -1) &= 0\\ 8y - z &= -9\end{aligned}$$

likningen til tangentplanet. For å gjøre uttrykkene penere ser vi på nivåkurvene som svarer til $z = e^{c+4}$ (hvorfor taper vi ingenting på dette?). Ved å ta logaritmen av likningen

$$e^{x^2 - 2x - 4y^2 + 5} = e^{c+4}$$

ender vi opp med

$$x^2 - 2x - 4y^2 + 5 = c + 4,$$

som kan skrives som

$$(x - 1)^2 - 4y^2 = c.$$

Denne likningen beskriver hyperbler sentrert i $(1, 0)$. Vi deler nå inn i tre forskjellige tilfeller: Hvis $c > 0$ ligger brennpunktene på x-aksen, mens når $c < 0$ ligger de på linjen $x = 1$. Spesialtilfellet $c = 0$ svarer til de to linjene $y = \pm\frac{1}{2}(x - 1)$. Se Figure 2.

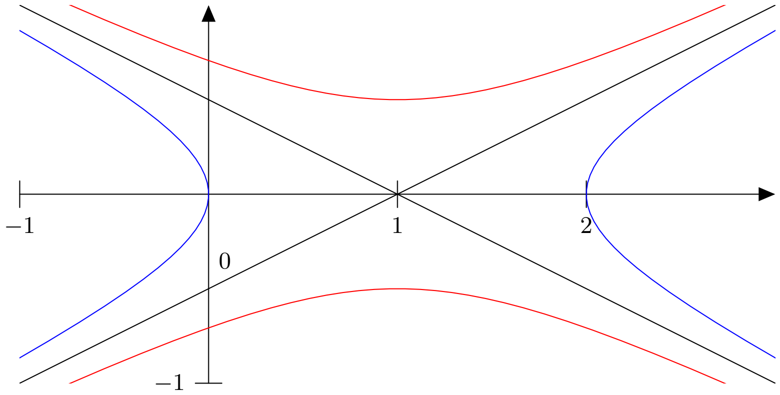

FIGURE 2. Nivåkurvene som svarer til $c = -1$ (rød), $c = 0$ (svart) og $c = 1$ (blå).