Anbefalte oppgaver - Løsningsforslag

Uke 5

12.3.5: Vi ønsker å finne de første ordens deriverte til funksjonen f definert ved $f(x,y) = \arctan(y/x)$. Først finner vi den deriverte med hensyn på x, ved å betrakte y som en konstant. Vi bruker kjerneregelen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\\ &= -\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Spesielt er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = -\frac{1}{2}.$$

På tilsvarende måte finner vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{x}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -\frac{1}{2}.$$

12.4.6: Vi regner først ut den førstederiverte til f med hensyn på x, og finner

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)}{1+\sin(xy)},$$

som vi så bruker for å regne ut

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-y^2\sin(xy)(1+\sin(xy)) - y^2\cos(xy)^2}{(1+\sin(xy))^2}\\ &= \frac{-y^2(\sin(xy) + \overbrace{\sin(xy)^2+\cos(xy)^2}^{=1})}{(1+\sin(xy))^2}\\ &= -\frac{y^2}{1+\sin(xy)},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{(\cos(xy)-xy\sin(xy))(1+\sin(xy)) - xy\cos(xy)^2}{(1+\sin(xy))^2}\\ &= \frac{(\cos(xy)-xy)(1+\sin(xy))}{(1+\sin(xy))^2}\\ &= \frac{\cos(xy)-xy}{1+\sin(xy)}.\end{aligned}$$

Vi kan nå spare oss selv arbeid ved å observere at x og y spiller samme rolle i f. Vi kan derfor finne de deriverte med hensyn på y ved å bytte om på x og y over. I tillegg vet vi at $f_{xy} = f_{yx}$ fra Teorem 1 på side 691 i boken. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x\cos(xy)}{1+\sin(xy)}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{x^2}{1+\sin(xy)}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\cos(xy) - xy}{1+\sin(xy)}.
\end{aligned}$$

12.5.2: Vi ønsker å partiellderivere $f(x,y,z)$ med hensyn på t, når $x = g(s)$, $y = h(s,t)$, og $z = k(t)$. Generelt har vi fra kjerneregelen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

I dette tilfellet er $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$, og $\frac{\partial z}{\partial t} = k'$. Vi setter inn dette, og oppnår

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t} + k'\frac{\partial f}{\partial z}.$$

12.5.4: Vi lar

$$w = f(x,y) \qquad x = g(r,s) \qquad y = h(r,t) \qquad r = k(s,t) \qquad s = m(t).$$

Da blir

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial t}\right) + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial m}{\partial t}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t}\right).$$

12.5.24: Vi vil i denne oppgaven bruke subskriptnotasjonen for partiellderiverte der vi indekserer med variable; for eksempel vil vi ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y)$. Ved å partiellderivere begge sider av ligningen $r^2 = x^2 + y^2$ med hensyn på x, finner vi at $2rr_x = 2x$. Ved å bruke $x = r\cos\theta$, ser vi at vi må ha

$$r_x = \cos\theta.$$

På tilsvarende vis får vi at

$$r_y = \sin\theta.$$

For å finne $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, partiellderiverer vi begge sider av ligningen $x = r\cos\theta$ med hensyn på x. Da får vi

$$\begin{aligned}
1 &= r_x\cos\theta - r\sin(\theta)\theta_x \\
&= \cos^2\theta - r\sin(\theta)\theta_x \\
&= 1 - \sin^2\theta - r\sin(\theta)\theta_x
\end{aligned}$$

Ved å løse for θ_x, finner vi[1]

$$\theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

Tilsvarende får vi

$$\theta_y = \frac{\cos\theta}{r}.$$

[1]Her deler vi på $\sin\theta$, så utledningen holder bare for punkter som ikke ligger på x-aksen. Men ved å bruke definisjonen av partiellderivert, ser man at formelen er riktig også for de resterende punktene.

Vi bruker nå disse formlene for å uttrykke $u_{xx} + u_{yy}$. Vi har at

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

og

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_r r_x + u_\theta \theta_x)_x \\ &= (u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x)\, r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x)\, \theta_x + u_\theta \theta_{xx}. \end{aligned}$$

Vi finner også at

$$u_{yy} = (u_{rr} r_y + u_{r\theta} \theta_y)\, r_y + u_r r_{yy} + (u_{\theta r} r_y + u_{\theta\theta} \theta_y)\, \theta_y + u_\theta \theta_{yy}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = (r_x^2 + r_y^2) u_{rr} + (2 r_x \theta_x + 2 r_y \theta_y) u_{r\theta} + (\theta_x^2 + \theta_y^2) u_{\theta\theta} \\ + (r_{xx} + r_{yy}) u_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy}) u_\theta \end{aligned}$$

Ved å bruke relasjonen $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ og formlene vi fant ovenfor, ser vi at de tre første parentesene på høyresida er henholdsvis 1, 0 og $1/r^2$. For å finne de to siste parentesene, utfører vi de nødvendige partiellderiveringene:

$$r_{xx} = \frac{\sin^2\theta}{r} \qquad r_{yy} = \frac{\cos^2\theta}{r}$$

$$\theta_{xx} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2} \qquad \theta_{yy} = -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}$$

Dette betyr at de er henholdsvis $1/r$ og 0. Alt i alt får vi

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r.$$

RE 12.4: Vi har funksjonen f definert ved delt forskrift:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Vi undersøker om de første partiellderiverte eksisterer i $(0,0)$ ved å bruke grenseverdidefinisjonen av de partiellderiverte i $(0,0)$ direkte. Vi begynner med den partiellderiverte med hensyn på første argument

$$\begin{aligned} f_1(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+0} - 0}{h} = 1. \end{aligned}$$

Tilsvarende, for andre argument,

$$\begin{aligned} f_2(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{0+h^2} - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Grensene eksisterer, dermed har vi funnet $f_1(0,0)$ og $f_2(0,0)$. For å kunne vurdere om de høyereordens partiellderiverte eksisterer i $(0,0)$, må vi finne de førsteordens

partiellderiverte i et vilkårlig punkt $(x, y) \neq (0, 0)$. For å gjøre dette bruker vi kvotientregelen.

$$f_1(x, y) = \frac{3x^2\left(x^2 + y^2\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$
$$f_2(x, y) = -\frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

hvor vi i $(0, 0)$ har grenseverdiene beregnet over. Igjen må vi bruke grenseverdidefinisjonen for å vurdere om $f_{21}(0, 0)$ og $f_{12}(0, 0)$ eksisterer.

$$\begin{aligned} f_{21}(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f_2(0 + h, 0) - f_2(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{(h^2+0)^2} - 0}{h} = 0, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f_{12}(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(0, 0 + h) - f_1(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0+0}{h^4} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h}, \end{aligned}$$

som ikke eksisterer.

RE 12.5: Både telleren og nevneren er kontinuerlige overalt. Funksjonen f er derfor definert og er kontinuerlig utenom når nevneren er null, altså på de to linjene $y = \pm x$. Fra hintet er

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$$

der f er definert. Siden telleren ikke er null når $y = -x$ (utenom i origo) viser dette at vi kan utvide f kontinuerlig til linjen $y = x$, men ikke til $y = -x$ (utenom muligens i origo). Se Figure 1. Så hva med origo? Langs linjen $y = x$, etter kontinuerlig utvidelse, har vi

$$f(x, x) = \frac{3}{2}x,$$

slik at hvis $\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y)$ skal eksistere, må den være 0. Derimot kan vi i etterhvert omegn av origo finne punkter der $|f(x, y)|$ er vilkårlig stor ved å nærme oss linjen $y = -x$. Derfor kan ikke grensen eksistere, og f er ikke kontinuerlig i origo. Alternativt kan vi velge en kurve som nærmer seg $y = -x$ samtidig som den nærmer seg origo. En slik kurve er $y = -x(1 - x)$. Vi finner $f(x, -x(1 - x)) = 1 - x + x^2$, som går mot 1, og ikke 0. Siden $f(x, 0) = x$ for $x \neq 0$ og $f(0, y) = y$ for $y \neq 0$ vil begge de første partiellderiverte eksistere og være lik 1 dersom vi definerer $f(0, 0) = 0$. Partiellderiverte kan derfor eksistere uten at funksjonen er kontinuerlig, noe som ikke var tilfelle i én dimensjon.

CP 12.2: Gradientvektoren står normalt på nivåflatene (hvorfor?), og derfor må vi ha at kurven i oppgaven er parallell med skalarfeltets gradient. Dette kan for eksempel beskrives av ligningene

$$x'(t) = -2x \qquad y'(t) = -4y \qquad z'(t) = 6z.$$

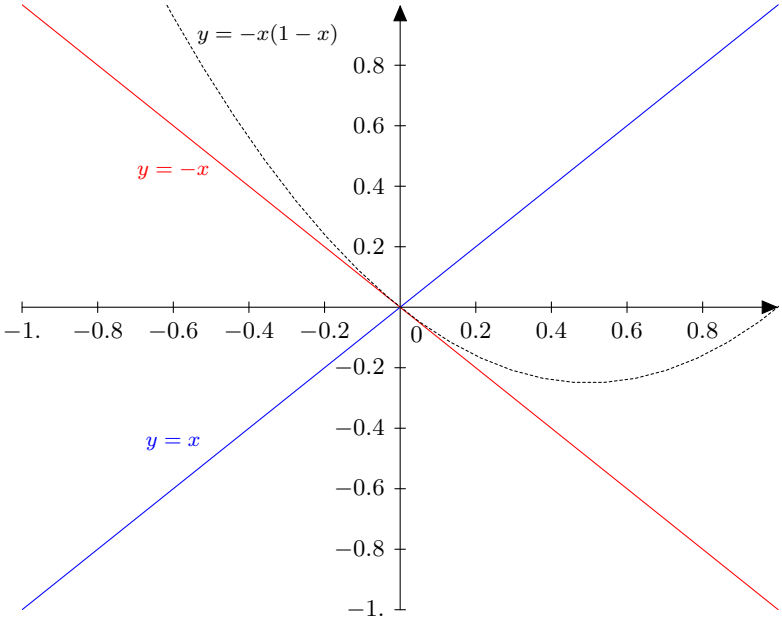

FIGURE 1. Situasjonen i Chapter Review 12.5

(Finnes det andre muligheter?) Hvis vi krever at $\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 8)$, har vi tre initialverdiproblemer, som løses av

$$x(t) = e^{-2t} \qquad y(t) = e^{-4t} \qquad z(t) = 8e^{6t}.$$

Setter vi inn $t = \frac{-\ln 2}{2}$, får vi $\mathbf{r}(\frac{-\ln 2}{2}) = (2, 4, 1)$. Kravet at $0 = z(t)$ gir at $t \to -\infty$, og i det tilfellet vil $x(t), y(t) \to \infty$, så det kan ikke stemme at kurven passerer gjennom punktet $(3, 7, 0)$.