Anbefalte oppgaver - Løsningsforslag

Uke 4

12.1.13: Når du skisserer grafen er det lurt å utnytte at f ikke avhenger av x. Se figuren under.

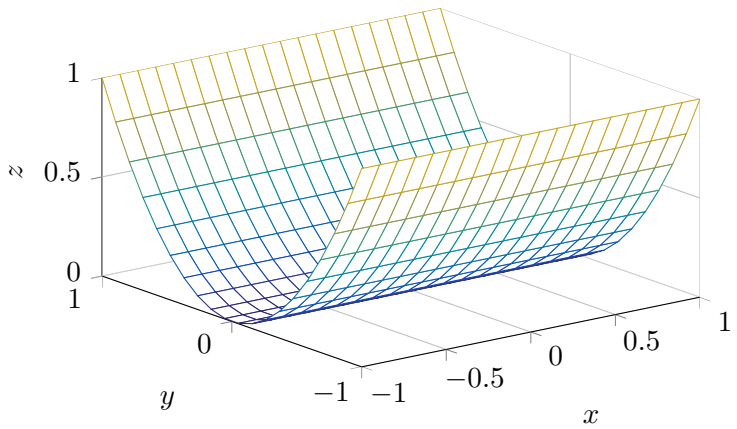

FIGURE 1. Grafen til $f(x, y) = y^2$ for $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

12.1.40: Funksjonen f tar bare ikke-negative verdier. Vi ønsker derfor å se på nivåflaten som svarer til $f(x, y, z) = c^2$, der $c \geq 0$. Likningen

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = c^2$$

kan skrives om til

$$x^2 + y^2 = c^2 z^2,$$

eller

$$r = c|z|$$

i sylinderkoordinater. Nivåflatene er derfor sirkulære kjegler (uten origo, som ikke er i domenet til f) med akse langs z-aksen. Konstanten c bestemmer vinkelen α mellom kjeglen og z-aksen. Nærmere bestemt er denne gitt ved

$$\alpha = \arctan(c).$$

Spesialtilfellet $c = 0$ svarer til en rett linje.

12.2.6: Merk at dersom vi fikserer enten $x = 0$ eller $y = 1$ ser vi at eneste mulige kandidat for grensen er 0. Derfor prøver vi å vise at grensen er nettopp dette. Observer at hvis a og b er to tall har man alltid at

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

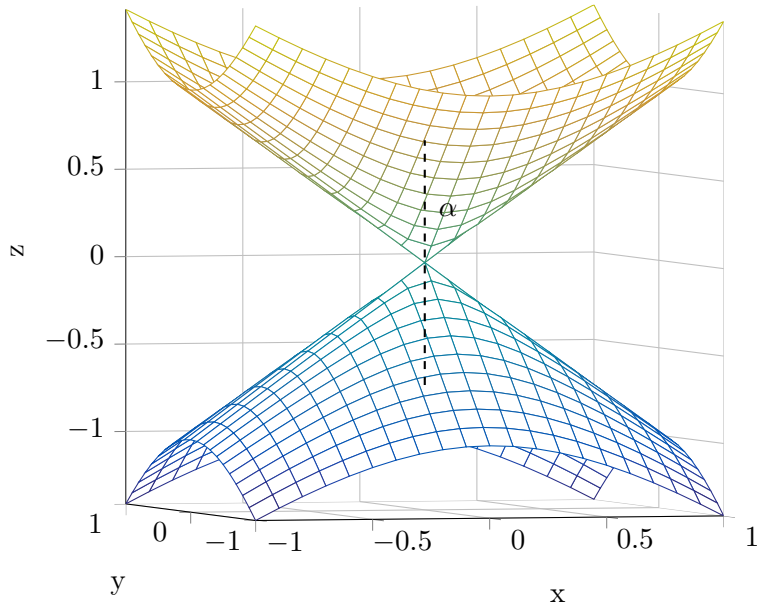

FIGURE 2. Nivåflaten som svarer til $c = 1$.

som følger av at $(a-b)^2 \geq 0$. Ved å velge $a = x$ og $b = y-1$ har vi dermed at

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \\ &\leq \frac{1}{4}\frac{(x^2+(y-1)^2)^2}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}(x^2+(y-1)^2), \end{aligned}$$

som klart går mot 0 når $(x,y) \to (0,1)$. (Alternativt kan man for eksempel bruke at $x^2 \leq x^2 + (y-1)^2$, men denne teknikken er verdt å kjenne til).

12.2.9: Det aner oss at grensen ikke eksisterer. Vi prøver derfor å se på hva uttrykket går mot langs ulike linjer på formen $y = ax$ gjennom origo. Vi har

$$\frac{\sin(x(ax))}{x^2+(ax)^2} = \frac{a}{1+a^2}\frac{\sin(ax^2)}{ax^2},$$

og dermed

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=ax}} = \frac{a}{1+a^2},$$

der vi har brukt den velkjente grensen $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$. Siden uttrykket går mot forskjellige verdier (hele intervallet $[-1/2, 1/2]$) avhengig av hvilken linje vi velger eksisterer ikke grensen. **Obs:** Om vi ønsker å vise at en grense eksisterer er det *ikke* nok å sjekke at grensene langs hver linje eksisterer og er like!

12.2.19: Vi innfører polarkoordinater, og beregner

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{ar^2\cos^2\theta + br^2\cos\theta\sin\theta + cr^2\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta}$$

Dette er funksjonsuttrykkets grenseverdi i origo, og for at denne skal eksistere, må vi kreve at uttrykket er uavhengig av θ, altså at

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta} = k.$$

Vi ganger opp, og får

$$\cos\theta\sin\theta = k(a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta).$$

Dette går bra dersom $a = c = 0$. Da blir $k = \frac{1}{b}$.

15.3.2: Den generelle formelen for kurveintegralet av en funksjon med hensyn på kurvelengden er gitt ved

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| ds.$$

I vårt tilfelle er $f(\mathbf{r}(t)) = t$, og

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = |\mathbf{r}'(t)| = |2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}| = \sqrt{1+8t^2}.$$

Dermed er integralet vi skal finne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} y\,ds &= \int_0^m t\sqrt{1+8t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{16}\int_{t=0}^m \sqrt{u}\,du = \frac{1}{16}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^m \\
&= \frac{1}{24}\left[\left(1+8t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^m \\
&= \frac{1}{24}\left(\left(1+8m^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

ved substitusjonen $u = 1 + 8t^2$, $du = 16t\,dt$.

15.3.2: Vi begynner med å parametrisere kurven.

$$(a\cos(t), a\sin(t), a\cos(t)), \qquad 0 \le t \le \pi/2,$$

som fremgår ved først å parametrisere en sirkel om origo med radius a i $x-y$–planet, og så sette $z = x$. Vi får da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} x\,ds &= a^2\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2}\,dt \\
&= a^2\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{1+\sin^2(t)}\,dt \\
&= a^2\int_0^1 \sqrt{1+v^2}\,dv,
\end{aligned}$$

der vi brukte substitusjonen $v = \sin(t)$. Substitusjonen $v = \sinh(p)$, samt identiteten $1 + \sinh^2(p) = \cosh^2(p)$, gir så

$$\begin{aligned} a^2 \int_0^1 \sqrt{1+v^2}\, dv &= a^2 \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \cosh^2(p)\, dp \\ &= a^2 \left[\frac{1}{2} \cosh(x) \sinh(x) + \frac{1}{2} x \right]_0^{\sinh^{-1}(1)} \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\sqrt{2} + \sinh^{-1}(1) \right). \end{aligned}$$