TMA4105 Matematikk 2

Interaktive forelesninger

Uke 2

Læringsoppgaver.

1. **a)** Betrakt annengradsflaten

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}. \tag{1}$$

Hva slags flate er dette?

b) Dobbeltsjekk at punktet $(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 3)$ ligger på flaten over.

Betrakt nå annengradspolynomet $f(t) = at^2 + bt + c$. Vi velger et punkt t_0 og skriver om annengradsleddet slik:

$$f(t) = a(t - t_0)^2 + (2at_0 + b)t + (c - at_0^2)$$

(sjekk at de to uttrykkene er like!). Hvis t ligger nærme t_0 er annengradsleddet $(t-t_0)^2$ veldig lite, og ved å ignorere det får vi følgende *lineære approksimasjon* til f:

$$L(t) = (2at_0 + b)t + (c - at_0^2).$$

Dette er uttrykket for førstegradspolynomet som tangerer grafen til f i punktet t_0.

c) Legg til og trekk fra ledd i ligning (**??**) slik som med $f(t)$, og ignorer så alle annengradsledd. Hva slags flate står du nå igjen med? Hva har denne flaten med den opprinnelige annengradsflaten å gjøre?

2. Alle punkter (x, y, z) som ligger på enhetssfæren

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

har kulekoordinater på formen $[1, \phi, \theta]$ (hvorfor?).

a) La $\mathbf{p}$ være et punkt på øvre del av enhetssfæren med kulekoordinater $[1, \phi, \theta]$. La $\mathbf{q}$ være punktet med kulekoordinater $[1, \phi + \frac{\pi}{2}, \theta]$. Vis at vektoren $\mathbf{q}$ står ortogonalt på $\mathbf{p}$.
(Hint: Uttrykk $\mathbf{p}$ *og* $\mathbf{q}$ *med kartesiske koordinater og beregn prikkproduktet deres.)*

b) Beregn vektoren $\mathbf{r} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$. Hvorfor ligger også $\mathbf{r}$ på enhetssfæren?

c) La nå $\mathbf{p} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Finn de tilsvarende punktene $\mathbf{q}$ og $\mathbf{r}$.

Maple T.A.-oppgaver.

1. **a)** Konverter punktet med sylinderkoordinater $[2, \frac{\pi}{4}, 3]$ til kartesiske koordinater og kulekoordinater.

b) Par de følgende ligningene i polarkoordinater med sine respektive motparter i kartesiske koordinater:

$$r = \frac{2}{\sqrt{\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta)}} \qquad r = \sin(\theta) + \cos(\theta)$$

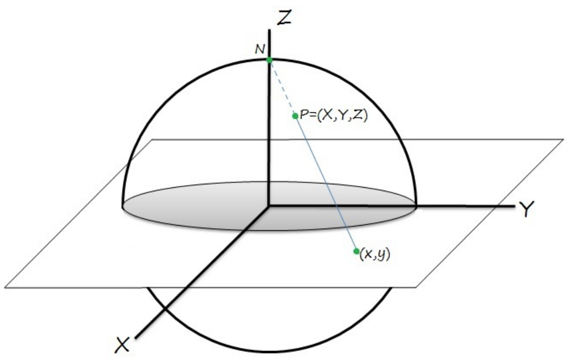
$$r = \frac{5}{\sin(\theta)} \qquad r = \sec(\theta)\tan(\theta)$$

1. $x^2 + y^2 = x + y$
2. $y = x^2$
3. $x^2 + 4y^2 = 4$
4. $y = 5$

2. La $\mathcal{S}$ være sfæren med sentrum i origo og radius $R = 1$. La $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ være nordpolen til $\mathcal{S}$. Kulekoordinatene til $\mathcal{S}$ er definert ved

$$x = \sin(\phi)\,\cos(\theta), \quad y = \sin(\phi)\,\sin(\theta), \quad z = \cos(\phi),$$

der $0 \leq \theta < 2\pi$ og $0 \leq \phi \leq \pi$.



a) Beregn kulekoordinatene til punktet $\mathbf{p} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ i $\mathcal{S}$.

b) Gitt punktet $\mathbf{p}$ over, finn ligningen til planet som passerer gjennom $\mathbf{p}$ og har $\mathbf{p}$ som normalvektor.

c) La L være linjen som går gjennom nordpolen til $\mathcal{S}$ og punktet $\mathbf{p}$. Finn de kartesiske koordinatene til punktet $\mathbf{q}$ der L skjærer xy-planet. Punktet $\mathbf{q}$ kalles den *stereografiske projeksjonen* til $\mathbf{p}$.

Kommentar: Hvor befinner $\mathbf{q}$ seg dersom $\phi > \frac{\pi}{2}$ istedenfor $\phi < \frac{\pi}{2}$?