Anbefalte oppgaver - Løsningsforslag

Uke 16

13.2.9: Vi starter med å finne de kritiske punktene. De deriverte blir

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = (1-2x^2-2xy)e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = (1-2y^2-2xy)e^{-x^2-y^2},$$

slik at de kritiske punktene må tilfredstille

$$1-2x^2-2xy=0,$$
$$1-2y^2-2xy=0.$$

Om vi trekker de to likningene fra hverandre finner vi at $x^2=y^2$, eller at $y=\pm x$. Valget $y=-x$ leder ikke til noen løsninger, mens innsetting av $y=x$ leder til $x=\pm 1/2$. T har derfor to kritiske punkter $\pm(1/2,1/2)$, som svarer til $T=\pm e^{-1/2}$. Merk at de to kritiske punktene ligger i det indre av enhetsdisken. Det gjenstår å sjekke randverdiene, som er enklest å gjøre ved hjelp av polarkoordinater. Vi finner

$$\begin{aligned} T(\theta) &= (\cos(\theta)+\sin(\theta))e^{-1} \\ &= \sqrt{2}\cos(\theta-\pi/4)e^{-1}, \end{aligned}$$

hvor vi umiddelbart ser at største og minste verdi på randen er $\pm\sqrt{2}e^{-1}$. (Om du ikke kjenner til overgangen fra første til andre linje er det fullt mulig å derivere også.) Siden

$$\left(\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}e^{-1}}\right)^2 = \frac{e}{2} > 1$$

har vi

$$\sqrt{2}e^{-1} < e^{-1/2}.$$

Den største temperaturen i disken er derfor $T=e^{-1/2}$ i punktet $(1/2,1/2)$, og den minste er $T=-e^{-1/2}$ i punktet $(-1/2,-1/2)$.

13.2.12: Vi kaller funksjonen vår $f(x,y,z)=xz+yz$, og begynner med å finne de partiellderiverte

$$f_x(x,y,z)=z, \quad f_y(x,y,z)=z, \quad f_z(x,y,z)=x+y.$$

Dermed er alle de indre kritiske punktene til funksjonen i xy–planet langs linjen $x=-y$, hvor funksjonen er identisk lik 0. På sfæren $x^2+y^2+z^2=1$ kan vi skrive funksjonen som

$$f(x,y,z)=(x+y)z=\pm(x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}=g(x,y),$$

hvor $x^2+y^2\leq 1$. Vi observerer at funksjonen er 0 på randa $x^2+y^2=1$, og at den har både positive og negative verdier på områdets indre, altså kan vi redusere til å se på

området $x^2 + y^2 < 1$. Her kan vi finne de kritiske punktene til g:

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{(x+y)(-2x)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= \frac{1-x^2-y^2-xy-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ g_y(x,y) &= \frac{1-x^2-y^2-xy-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \end{aligned}$$

Disse er 0 når

$$2x^2 + y^2 + xy = 1 = x^2 + 2y^2 + xy,$$

altså når $x^2 = y^2$. Hvis $x = -y$ er $g = 0$, så $f = 0$. Hvis $x = y$, har vi $2x^2 + x^2 + x^2 = 1$, så $x^2 = \frac{1}{4}$, og dermed er $x = \pm\frac{1}{2}$. Fra dette konkluderer vi med at g, med de to valgene av fortegn, har i alt fire kritiske punkter, siden de forskjellige valgene av fortegn gir forskjellige z–koordinater. Disse punktene gir verdiene $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi har dermed sett på alle punktene hvor f kan ha ekstremalverdier, nemlig randa til kula og de kritiske punktene, og kommet frem til at vi har maksimum $\frac{1}{\sqrt{2}}$, i punktene $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, og minimum $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, i punktene $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Merk at alle disse fire punktene ligger på randa.

13.3.2: **a)** Avstanden fra $(3,0)$ til (x,y) er gitt ved

$$d(x,y) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2},$$

for punkter på parabelen kan vi sett inn $y = x^2$, slik at funksjonen vi ønsker å minimere er

$$\tilde{g}(x) = d(x, x^2) = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}.$$

For å lette regningen, observerer vi at kvadratrotfunksjonen er monotont økende, så vi kan like gjerne minimere

$$g(x) = \tilde{g}(x)^2 = (x-3)^2 + x^4.$$

Vi setter den deriverte lik 0:

$$g'(x) = 2x - 6 + 4x^3 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0,$$

her har vi observert at $x = 1$ må være en rot, og utført polynomdivisjon. Ved å se på diskriminanten til andre faktor, ser vi at denne ikke har noen reelle røtter. Dermed er punktet $(1,1)$ minimerende, og

$$d(1,1) = \sqrt{(1-3)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

er den minste avstanden fra parabelen $y = x^2$ til punktet $(3,0)$.

b) Vi ønsker å minimere funksjonen (som over)

$$d(x,y) = (x-3)^2 + y^2,$$

gitt bibetingelsen $x - y^2 = 0$. Dette gir Lagrange–funksjonen

$$L(x,y,\lambda) = (x-3)^2 + y^2 + \lambda(y - x^2),$$

med deriverte

$$\begin{aligned} L_x &= 2x - 6 - 2x\lambda, \\ L_y &= 2y + \lambda, \\ L_\lambda &= y - x^2. \end{aligned}$$

Dette gir $\lambda = -2y$ og $x = 3/(1-\lambda)$, slik at

$$0 = -\frac{\lambda}{2} - \left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2.$$

Denne likninga har reell løsning $\lambda = -2$, som gir $x = y = 1$ og, som over, at den minimale distansen er $d = \sqrt{6}$.

13.3.3: **a)** En normalvektor for planet er $\mathbf{N} = (1, 2, 2)$. Hvis $\mathbf{x}$ er det nærmeste punktet til origo på planet må $\mathbf{N}$ og $\mathbf{x}$ være parallelle (lag en tegning). Vi har dermed

$$3 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{N}||\mathbf{x}| = 3|\mathbf{x}|,$$

og derfor $|\mathbf{x}| = 1$. Merk at det første likhetstegnet kommer fra definisjonen av planet. (Dette er den desidert enkleste metoden dersom man kun ønsker å vite avstanden, og ikke hvilket punkt som er det nærmeste.)

b) Vi ønsker å minimere $x^2 + y^2 + z^2$, gitt at $x + 2y + 2z = 3$. Ved å løse likningen for x ser vi at dette er ekvivalent med å minimere

$$f(y, z) = (3 - 2y - 2z)^2 + y^2 + z^2.$$

Merk at f er glatt, og at $f(y, z) \to \infty$ når $|(y, z)| \to \infty$. Ved å velge en tilstrekkelig stor disk sentrert i origo kan vi bruke Teorem 2 i 13.1 for å konkludere at det finnes et globalt minimum. Dette punktet må være et kritisk punkt. De kritiske punktene må oppfylle likningssystemet

$$\begin{aligned} 2(3 - 2y - 2z)(-2) + 2y &= 0, \\ 2(3 - 2y - 2z)(-2) + 2z &= 0, \end{aligned}$$

hvor vi umiddelbart kan konkludere at $y = z$ ved å trekke de to likningene fra hverandre. Ved innsetting leder dette til $y = z = 2/3$, og derfor $x = 3 - 4/3 - 4/3 = 1/3$ ved å benytte likningen for planet. Siden dette er det eneste kritiske punktet må det svare til det globale minimumet. Spesielt er

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

avstanden til planet.

c) Lagrangefunksjonen blir

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + 2z - 3).$$

som leder til

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + 2y + 2z - 3 = 0. \end{aligned}$$

Fra de tre første likningene finner vi $x = -\lambda/2$, $y = -\lambda$ og $z = -\lambda$. Setter vi dette inn i den siste likningen finner vi

$$-\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 2\lambda - 3 = 0,$$

eller $\lambda = -2/3$. Dette gir igjen $x = 1/3$, $y = 2/3$ og $z = 2/3$. Dette må nødvendigvis være et globalt minimum, fordi gradienten til $x + 2y + 2z - 3$ aldri er null og fordi $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ når $|(x, y, z)| \to \infty$. Avstanden til planet blir derfor

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

13.3.4: Vi skal finne ekstremalverdiene til funksjonen gitt ved

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

på sfæren $x^2+y^2+z^2-1 = 0$, og velger å gjøre dette ved Lagranges multiplikatormetode, med funksjonen

$$L(x, y, z) = x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Denne har første partiellderiverte

$$\begin{aligned} L_x &= 1 + 2x\lambda \\ L_y &= 1 + 2y\lambda \\ L_z &= -1 + 2z\lambda \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1, \end{aligned}$$

vi ser umiddelbart at $x = y$, og fra de to første likningene finner vi $1 + 2x\lambda = 0$, som kombinert med tredje likning gir:

$$0 = 2x + 2z.$$

Dette gir $x = y = -z$, og vi bruker siste likning for å finne hvilke punkter dette tilsvarer:

$$3x^2 = 1,$$

så vi har ekstremalverdier på de to punktene

$$p = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{og} \quad q = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Innsatt i f gir dette

$$f(p) = \sqrt{3} \quad \text{og} \quad f(q) = -\sqrt{3},$$

som er henholdsvis maksimal og minimal verdi.

13.3.12: Vi ønsker å maksimere $\sum_{i=1}^n x_i$ gitt at $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Vi skriver $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Merk at $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ beskriver en lukket og begrenset mengde i $\mathbb{R}^n$, og at funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$$

er kontinuerlig. Det finnes altså et slikt maksimum, og vi kan finne det ved hjelp av Lagrangemultiplikatormetoden fordi

$$\nabla\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1\right) = 2\mathbf{x},$$

som aldri er null på n-sfæren (hvorfor?). Lagrangefunksjonen blir

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1\right),$$

som leder til

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 1 + 2\lambda x_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0.$$

Merk at vi nødvendigvis må ha $\lambda \neq 0$, for ellers kan ikke de n første likningene være oppfylt. Vi får derfor $x_i = -1/(2\lambda)$ for $i = 1, \ldots, n$, som innsatt i den siste likningen gir

$$\frac{n}{4\lambda^2} - 1 = 0,$$

eller $\lambda = -\sqrt{n}/2$ ($\lambda = \sqrt{n}/2$ vil gi minimum), og derfor $x_i = 1/\sqrt{n}$ for $i = 1, \ldots, n$. Maksimum blir derfor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

13.3.18: Vi tolker mest økonomisk til å bety størst mulig volum for et gitt areal av sideflatene (husk at toppen ikke er med). Hvis vi kaller sidekantene til esken x, y, z, slik at topp og bunn har konstant z-koordinat, ønsker vi å maksimere volumfunksjonen

$$V(x, y, z) = xyz,$$

gitt et konstant areal $A = xy + 2yz + 2xz > 0$. Vi kan da bruke Lagranges multiplikatormetode på funksjonen

$$L = xyz + \lambda(xy + 2yz + 2xz - A),$$

ved å sette alle fire partiellderiverte lik 0.

$$\begin{aligned} L_x &: \quad yz + \lambda(y + 2z) = 0 \\ L_y &: \quad xz + \lambda(x + 2z) = 0 \\ L_z &: \quad xy + \lambda(2y + 2x) = 0 \\ L_\lambda &: \quad xy + 2yz + 2xz = A. \end{aligned}$$

Ved symmetri ser vi at vi kan sette $x = y$ og stå igjen med likningene

$$0 = xz + \lambda(x + 2z) \tag{0.1}$$
$$0 = x^2 + 4x\lambda \tag{0.2}$$
$$A = x^2 + 4xz. \tag{0.3}$$

Vi kan faktorisere Ligning (2), og finne $x(x + 4\lambda) = 0$. Vi er ikke interessert i løsningene $x = 0$ da det medfører at $A = 0$, så $x = -4\lambda$. Videre har vi da fra Ligning (1) at $0 = 4xz - x^2 - 2xz$, altså

$$0 = x^{-}2xz = x(x - 2z).$$

Igjen kan vi se bort fra løsningen $x = 0$, så $x = 2z$. Til sammen gir dette den "mest økonomiske" formen til denne esken, som altså har kvadratisk grunnflate og med høyde halvparten av sidelengdene til grunnflaten.

RE 13.12: På grunn av symmetri vil ellipsoiden inneholde boksen så lenge den inneholder punktet $(1, 2, 3)$, altså når

$$\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} \leq 1.$$

Siden vi er ute etter å minimere volumet kan vi like godt sette likhetstegn her; dersom punktet ikke ligger på overflaten av ellipsoiden vil vi alltid kunne gjøre ellipsoiden litt mindre og fortsatt ha punktet innenfor.

Hvorfor vil det finnes et minimum? Merk at likningen som a, b, c må oppfylle impliserer at $a \geq 1$, $b \geq 2$ og $c \geq 3$. Spesielt betyr dette at volumet til ellipsoiden går mot uendelig når $|(a, b, c)| \to \infty$. På tilsvarende måte som i 13.3.3 b) kan vi derfor konkludere at det må finnes et globalt minimum. Siden

$$\nabla \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1 \right) = -2(a^{-1}\mathbf{i} + b^{-1}\mathbf{j} + c^{-1}\mathbf{k}) \neq 0$$

kan vi finne dette minimumet med Lagrangemultiplikatormetoden.

Vi får Lagrangefunksjonen

$$L(a, b, c, \lambda) = \frac{4\pi}{3}abc + \lambda \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1 \right),$$

og derfor likningene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a} &= \frac{4\pi}{3}bc - \lambda\frac{2}{a^3} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial b} &= \frac{4\pi}{3}ac - \lambda\frac{8}{b^3} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial c} &= \frac{4\pi}{3}ab - \lambda\frac{18}{c^3} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Om vi multipliserer de tre første likningene med a, b og c får vi

$$\frac{4\pi}{3}abc - \frac{2\lambda}{a^2} = 0, \quad \frac{4\pi}{3}abc - \frac{8\lambda}{b^2} = 0, \quad \frac{4\pi}{3}abc - \frac{18\lambda}{c^2} = 0,$$

som impliserer at

$$\frac{2\lambda}{a^2} = \frac{8\lambda}{b^2} = \frac{18\lambda}{c^2}.$$

Siden vi nødvendigvis må ha $\lambda \neq 0$ (fordi $a, b, c > 0$), betyr dette at

$$\frac{1}{a^2} = \frac{4}{b^2} = \frac{9}{c^2} = \frac{1}{3},$$

der den siste likheten kommer fra innsetting i likningen for $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$.

Den minste ellipsoiden som inneholder boksen svarer følgelig til $a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$ og $c = 3\sqrt{3}$, med volum

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\pi.$$