Anbefalte oppgaver - Løsningsforslag

Uke 15

13.1.4: De kritiske punktene finner vi hvor de partiellderiverte er 0. For funksjonen $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ har vi

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y, \quad f_y(x,y) = 4y^3 - 4x.$$

Disse er 0 når $x = y^3$ og $y^9 - y = 0$, altså er må vi ha $y = -1$, 0, eller 1; og da altså $x = y$. Dermed har vi funnet at de kritiske punktene til f er $(-1,-1)$, $(0,0)$, og $(1,1)$. For å klassifisere dem, ser vi på de andrederiverte

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2, \qquad f_{xy}(x,y) = -4$$
$$f_{yy}(x,y) = 12y^2,$$

Vi ser deretter på

$$B^2 - AC = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$$

evaluert i de forskjellige kritiske punktene. For $(-1,-1)$ og $(1,1)$ har vi

$$B^2 - AC = 16 - 144 < 0, \quad A > 0,$$

som gir lokale minima. For $(0,0)$ har vi

$$B^2 - AC = 16 - 0 > 0,$$

som gir en sadel.

13.1.22: Vi har $f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$, og finner

$$f_x(x,y) = 1 - \frac{1}{yx^2}, \qquad f_y(x,y) = 8 - \frac{1}{xy^2}.$$

De kritiske punktene (x,y) løser altså

$$yx^2 = 1 \qquad 8xy^2 = 1.$$

Dette gir det kritiske punktet $(2, 1/4)$. Vi finner at $f(2,1/4) = 6$. Det må være et minimum siden f er positiv i første kvadrant, og $f(x,y)$ går mot ∞ når (x,y) nærmer seg x- eller y-aksen (p.g.a. $1/xy$-leddet), eller hvis (x,y) går mot uendelig i hvilken som helst retning (grunnet de lineære leddene). (Mer formelt: for små nok $\varepsilon > 0$ og store nok $R > 0$, vil $f(x,y) > 100$ for alle punkter (x,y) som ligger på sidekantene av rektangelet med hjørner $(\varepsilon,\varepsilon)$, (R,ε), (ε,R) og (R,R). Siden unionen av rektangelet og dets indre er en lukket og begrenset mengde, vil funksjonen f (som er kontinuerlig) ha et minimum på denne mengden (Teorem 2 s. 746 i Adams 8. utg.) Da vi har funnet et indre punkt med lavere verdi enn randpunktene, må minimum forekomme i et kritisk punkt (Teorem 1 s. 746). Siden det kun er ett kritisk punkt i første kvadrant, må dette være minimum. Merk også at andrederiverttesten kun kan vise at punktet er et *lokalt* minimum.)

13.1.26: Vi vil maksimere $f(a,b,c) = ab^2c^3$ for positive a, b og c under betingelsen $a+b+c=30$. Ved å skrive $a = 30-b-c$ og sette inn i f, skal vi maksimere

$$f(b,c) = 30b^2c^3 - b^3c^3 - b^2c^4.$$

Vi løser ligningene

$$f_b(b,c) = 60bc^3 - 3b^2c^3 - 2bc^4 = 0, \qquad f_c(b,c) = 90b^2c^2 - 3b^3c^2 - 4b^2c^3 = 0.$$

Siden både b og c er positive, kan de deles med, som forenkler ligningene til

$$\begin{aligned} f_c(b,c) = 0 &\iff 90b^2c^2 - 3b^3c^2 - 4b^2c^3 = 0 \\ &\iff 90 - 3b - 4c = 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f_b(b,c) = 0 &\iff 60bc^3 - 3b^2c^3 - 2bc^4 = 0 \\ &\iff 60 - 3b - 2c = 0. \end{aligned}$$

Ved å løse det resulterende lineære ligningssystemet, får vi løsningen $b = 10$ og $c = 15$, som gir $a = 5$. Det kritiske punktet svarer til et maksimum. For å se dette, merk først at vi maksimerer f over mengden[1]

$$a, b, c \geq 0 \qquad a + b + c = 30,$$

som er en lukket og begrenset mengde. Siden f er kontinuerlig, vet vi at et maksimum eksisterer. Et slikt maksimumspunkt forekommer enten i kritiske punkt, singulære punkt eller i randpunkt. Siden f er 0 langs randen og er deriverbar i alle indre punkt, må maksimum forekomme i et kritisk punkt. Siden vi kun fant ett kritisk punkt, må dette punktet være maksimumspunktet.

13.2.2: Funksjonen f er kontinuerlig og rektangelet lukket og begrenset, så vi har absolutte maksimum og minimum. Funksjonen gitt ved $f(x,y) = xy - 2x = x(y-2)$ har ingen kritiske punkter i det indre av domenet $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, så vi finner maksimale og minimale verdier på randa. Ved inspeksjon, for eksempel ved å parametrisere hver av de fire linjestykkene som utgjør randa til rektangelet, kan en overbevise seg om at det er på hjørnene ekstremalverdiene finnes. Så da har vi redusert oppgavene til å evaluere funksjonen i fire punkter og sammenligne disse:

$$f(-1,0) = 2, \quad f(-1,1) = 1, \quad f(1,0) = -2, \quad f(1,1) = -1.$$

Vi konkluderer at minimal verdi er -2 og maksimal verdi er 2.

13.2.6: Funksjonen er kontinuerlig og domenet lukket og begrenset, så vi har absolutte maksimum og minimum. Vi finner de første partiellderiverte av funksjonen ved hjelp av produktregelen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y(1-x-y) - xy = y(1-2x-y), \\ f_y(x,y) &= x(1-x-y) - xy = x(1-x-2y). \end{aligned}$$

Kritiske punkter er punkter hvor begge disse er lik 0, så vi må finne alle punkter (x,y) slik at dette stemmer. Ved å sette de partiellderiverte lik 0 og manipulere ligningene, kommer vi frem til hvis $y = 0$ må x være 0 eller 1, og vice versa, alle på randen av domenet. Hvis $y \neq 0$ må vi ha

$$1 - 2x - y = 0 \quad \text{og} \quad 1 - x - 2y = 0,$$

[1] I følge oppgaven skal vi kun se på punkter $a, b, c > 0$, men det skader ikke å ta med punkter der en av a, b og c er 0, siden f er 0 i disse punktene.

som gir $x = \frac{1}{3} = y$. Funksjonen evaluert i dette punktet er

$$f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27},$$

mens den på randa av området er 0, altså er randa minimum, og $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ maksimum på det oppgitte domenet.

13.2.8: Funksjonen er kontinuerlig og domenet lukket og begrenset, så vi har absolutte maksimum og minimum. Vi finner de første partiellderiverte av funksjonen ved hjelp av produktregelen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \sin y(\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)), \\ f_y(x,y) &= \sin x(\cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y)). \end{aligned}$$

Kritiske punkter er punkter hvor begge disse er lik 0, så vi må finne alle punkter (x, y) slik at dette stemmer. Ved å sette de partiellderiverte lik 0 og manipulere ligningene, kommer vi frem til

$$\tan x = -\tan(x+y) = \tan y.$$

Merk at vi kan dele på alle faktorene som er nødvendig for å få uttrykket over, siden alle de kritiske punktene slik at enten $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$, eller $\sin y$ er 0, er på randa. På vårt domene medfører dette at x være lik y. Vi kan parametrisere denne linja med $x = t$, $y = t$, og så maksimere en-variabelfunksjonen som framkommer langs denne kurven:

$$g(t) = f(t,t) = \sin^2 t \sin 2t = 2\sin^3 t \cos t.$$

Denne har derivert

$$g'(t) = 2\left(3\cos^2 t \sin^2 - \sin^4 t\right) = 2\sin^2 t\left(3\cos^2 t - \sin^2 t\right).$$

Igjen kan vi se bort fra første faktor, så vi får

$$\tan t = \pm\sqrt{3},$$

altså er g maksimal i punktet $t = \frac{\pi}{3}$, slik at den maksimale verdien til f på det indre av området vårt oppnås i punktet $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Siden $\sin 0 = 0$, er funksjonen identisk lik 0 langs begge koordinataksene, og siden $\sin \pi = 0$, er den identisk lik 0 på hele randa, så punktet vi fant over det vi leter etter. Dermed blir den maksimale verdien

$$f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \sin^2 \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

16.4.4: Vi bruker Divergensteoremet til å skrive om fluksintegralet av curlen til volumintegralet av divergensen. Divergensen er

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Siden vi skal integrere over en kule, og integranden har sfærisk symmetri, velger vi å integrere i kulekoordinater. Siden vi integrerer over hele kula, blir integrasjonsgrensene

at radien R går fra 0 til a, vinkelen θ går fra 0 til 2π, mens vinkelen ϕ går fra 0 til π.

$$\begin{aligned}
\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S &= \iiint \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint \left(3x^2+3z^2+3y^2\right)\mathrm{d}V \\
&= \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(3R^2)R^2\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}R \\
&= \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(3R^2)R^2\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}R \\
&= \frac{12\pi a^5}{5}.
\end{aligned}$$

16.5.1: Vi bruker Stokes' Teorem. Vi har vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$$

med tilhørende curl

$$\nabla\times\mathbf{F}(x,y,z) = -y\mathbf{i}-z\mathbf{j}-x\mathbf{k}.$$

Flaten vi skal integrere fluksen til curlen over er gitt ved

$$\mathcal{S}: \quad = 1-x-y, \qquad x,y,z\geq 0,$$

og denne flate har en konstant enhets-normalvektor

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}),$$

der minustegnet kommer fra den gitte orienteringa av randa. Vi får altså

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A &= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\mathcal{S}}(y+z+x)\,\mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\mathcal{S}}(y+(1-x-y)+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Areal}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Her brukte vi at $\mathrm{Areal}(\mathcal{S}) = \sqrt{3}/2$, siden $\mathcal{S}$ er en likesidet trekant med sidelengde $\sqrt{2}$.

16.5.4: Randa $\partial\mathcal{S}$ til $\mathcal{S}$ er sirkelen $x^2+y^2=4$ i xy-planet. Av Stokes' Teorem er fluksen av $\nabla\times\mathbf{F}$ ut av $\mathcal{S}$ lik linjeintegralet av $\mathcal{F}$ rundt $\partial\mathcal{S}$, orientert mot klokka. Men ved å bruke Stokes' Teorem igjen, så er dette også lik fluksen av $\nabla\times\mathbf{F}$ opp gjennom disken D gitt ved $x^2+y^2\leq 4$ i xy-planet; denne fluksen er enkel å beregne:

$$\begin{aligned}
\iint_D(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,\mathrm{d}A &= \iint_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}A \\
&= \iint_D\left(3x^2+3y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(r^2\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 24\pi.
\end{aligned}$$

Se også Eksempel 2 side 933 i Adams.