Anbefalte oppgaver - Løsningsforslag

Uke 10

14.5.7: Vi har at $\iiint_R xy\,dV = 0$, siden integranden er odde og integrasjonsområdet er symmetrisk om origo. Det følger at

$$\begin{aligned} I &= \iiint_R (xy + z^2)\,dV \\ &= \iiint_R z^2\,dV \\ &= 4\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^2\,dz\,dy\,dx, \end{aligned}$$

der faktoren 4 kommer fra at vi utnytter symmetrien til å kun integrere over den delen av integrasjonsområdet som ligger i første kvadrant. Grensene er funnet ved å først se på området x kan variere over, deretter hvilket område y kan variere over når x er fiksert, og til slutt hvilket område z kan variere over når x og y er fikserte.

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^3\,dy\,dx \\ &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^1 \left[(1-x-y)^4\right]_0^{1-x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^4\,dx \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

14.5.15: Vi skal evaluere integralet

$$I = \iiint_T x\,dV,$$

hvor T er tetraederet avgrenset av planene $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, og $x + y + z = 2$. Vi kan skrive T om til $0 \le x \le 1$, $1 - x \le y \le 1$, og $2 - x - y \le z \le 1$. Merk at området

er symmetrisk i x, y, z, så andre valg er også gyldige. Dette gir

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_{2-x-y}^1 x \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_{1-x}^1 [x]_{2-x-y}^1 \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_{1-x}^1 x(x+y-1) \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 x \left[xy + \frac{1}{2}y^2 - y \right]_{1-x}^1 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left((1-x)^2 + 2x - 1 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \, dx \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

14.6.1: Integrasjonsområdet er snittet av en kule og en kjegle, og kuler og kjegler beskrives enklest i kulekoordinater. I kulekoordinater er integrasjonsområdet gitt ved $0 \leq R \leq |a|$, $0 \leq \phi \leq \pi/4$. Ved å bruke formelen for volumelement i kulekoordinater, $dV = R^2 \sin(\phi) \, dR \, d\phi \, d\theta$, finner vi at volumet er

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{|a|} \int_0^{2\pi} R^2 \sin(\phi) \, d\theta \, dR \, d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/4} \int_0^{|a|} R^2 \sin(\phi) \, dR \, d\phi \\
&= \frac{2\pi |a|^3}{3} \int_0^{\pi/4} \sin(\phi) \, d\phi \\
&= \frac{\pi |a|^3}{3} \left(2 - \sqrt{2} \right).
\end{aligned}$$

14.6.13: I denne oppgaven er det på grunn av symmetrien enklest å bruke kulekoordinater, og vanskeligheten i å bestemme integrasjonsområdet $\mathbf{R}$ i disse koordinatene er kun å finne riktig vinkel ϕ; det er klart at vi må integrere over $0 \leq r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi ser at nedre grense for ϕ må være 0, så da gjenstår øvre grense. For å finne denne, ser vi bruker vi koordinattransformasjonsformelen direkte:

$$\tan \phi = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{c},$$

dermed har vi $0 \leq \phi \leq \arctan \frac{1}{c}$. Vi husker også at volumelementet i kulekoordinater er $dV = R^2 \sin\phi \, dR \, d\phi \, d\theta$, samt $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Dermed kan vi evaluere integralet:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\mathbf{R}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan \frac{1}{c}} \int_0^a R^2 R^2 \sin\phi \, dR \, d\phi \, d\theta \\
&= 2\pi \left(\int_0^{\arctan \frac{1}{c}} \sin\phi \, d\phi \right) \left(\int_0^a R^4 \, dR \right) \\
&= \frac{2\pi a^5}{5} \left[-\cos\phi \right]_0^{\arctan \frac{1}{c}} \\
&= \frac{2\pi a^5}{5} \left(1 - \cos \arctan \frac{1}{c} \right) = \frac{2\pi a^5}{5} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \right).
\end{aligned}$$

Den siste likheten kan vises ved å tegne en passende trekant.

14.7.2: Ved å derivere likningen for planet finner vi

$$5\frac{\partial z}{\partial x} = 3, \quad 5\frac{\partial z}{\partial y} = 4,$$

og derfor

$$\begin{aligned}
dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} \, dx \, dy \\
&= \sqrt{2} \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Hvis vi kaller flaten for R har vi at arealet til R blir

$$\begin{aligned}
\iint_R dS &= \sqrt{2} \iint_{x^2+4y^2 \leq 4} dx \, dy \\
&= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 2\sqrt{2}\pi,
\end{aligned}$$

der vi har brukt at en ellipse med halvakser a og b har areal πab (det er selvsagt også mulig å regne dobbeltintegralet med et iterert integral). Merk at likningen $x^2 + 4y^2 = 4$ kan skrives som

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1,$$

slik at halvaksene blir 2 og 1.

14.7.20: På grunn av symmetri må vi ha $\bar{x} = \bar{y} = 0$, slik at det bare gjenstår å beregne $\bar{z}$. Dette gjøres enklest ved å benytte sylinderkoordinater. Vi finner først at

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, dr \, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, dr
\end{aligned}$$

gir volumet til legemet. Substitusjonen $u = r^2$ gir

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\infty e^u \, du \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Vi finner nå

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{e^{-(x^2+y^2)}} z \, dz \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{e^{-r^2}} zr \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\infty r e^{-2r^2} \, dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-u} \, du \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

hvor vi har brukt substitusjonen $u = 2r^2$.

14.7.32: Denne oppgaven er skreddersydd for sylinderkoordinater, da $D = r$ og sylindrene er konsentriske. Vi kan beskrive legemet som

$$\{[r, \theta, z] : 0 \leq z \leq c, \, 0 \leq \theta < 2\pi, \, a \leq r \leq b\}.$$

Treghetsmomentet blir dermed

$$\begin{aligned} I &= \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_a^b r^2 \rho r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= c \cdot 2\pi \cdot \rho \int_a^b r^3 \, dr \\ &= \frac{\pi \rho c}{2} (b^4 - a^4), \end{aligned}$$

mens massen blir

$$\begin{aligned} m &= \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= c \cdot 2\pi \cdot \rho \int_a^b r \, dr \, d\theta \\ &= \pi \rho c (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Ved å bruke treghetsmomentet og massen finner vi treghetsradien

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \sqrt{\frac{I}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}}, \end{aligned}$$

hvor vi ser at $a \leq \bar{D} \leq b$, slik man kan forvente.

Eks aug 2001, 4: Siden integranden er uavhengig av y, utfører vi den innerste integrasjonen med en gang:

$$I = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin(2z)}{z-4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} x\frac{\sin(2z)}{z-4}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

Integrasjonsområdet for dette todimensjonale integralet er området i første kvadrant av xz-planet, avgrenset av koordinataksene og parabelen $z = 4 - x^2$. Vi bytter integrasjonsrekkefølgen og får

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z}} x\frac{\sin(2z)}{z-4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\sin(2z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\left[\cos(2z)\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(\cos 8 - 1\right).$$