Matematikk 2
Oversiktsforelesninger uke 7

Frode Rønning

Nøkkelbegreper uke 7

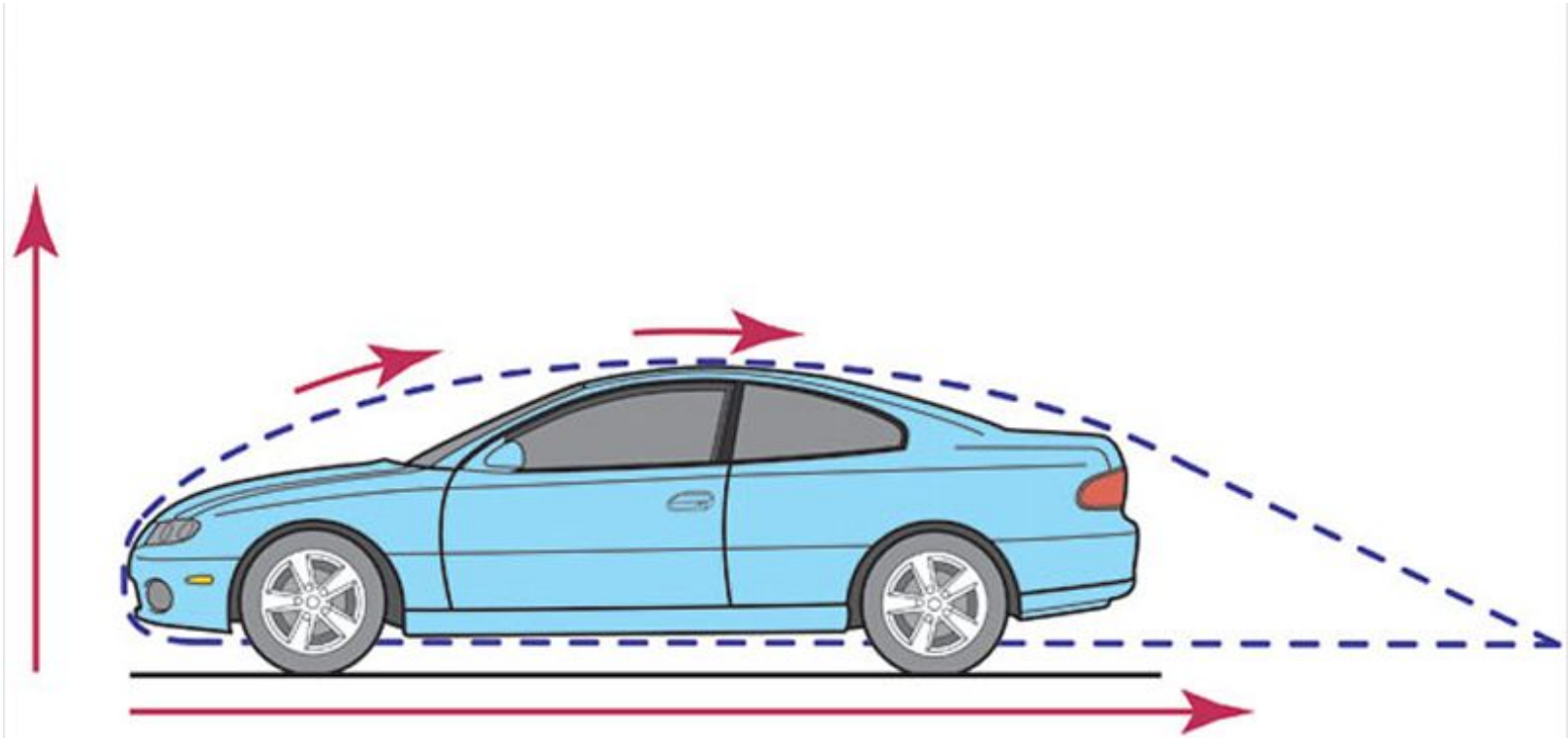
- Vektorfelt og skalare felt (15.1)
  - Glatte vektorfelt
  - Strømlinjer
- Konservative vektorfelt (15.2)
  - Nødvendige betingelser for konservative vektorfelt
- Linjeintegralet av vektorfelter (15.4)
  - Sirkulasjon – linjeintegralet rundt en lukket kurve
  - Teorem: Uavhengighet av integrasjonskurven for konservative vektorfelter

Vektorfelt og skalarfelt

Vektorfelt: $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Skalarfelt: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Vektorfelt og strømlinjer

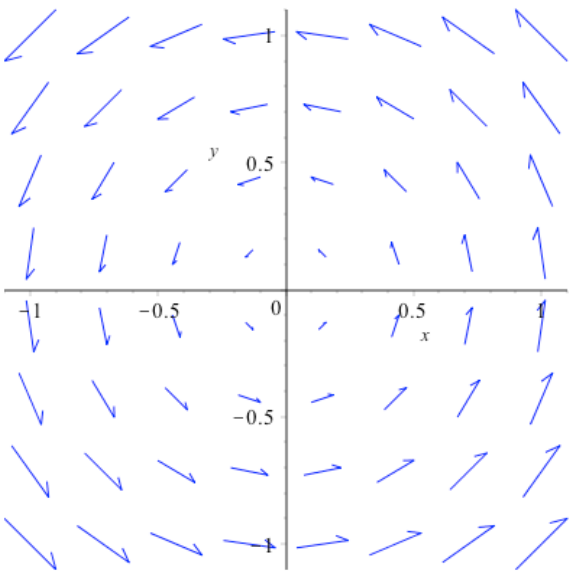


(www.ecomodder.com)

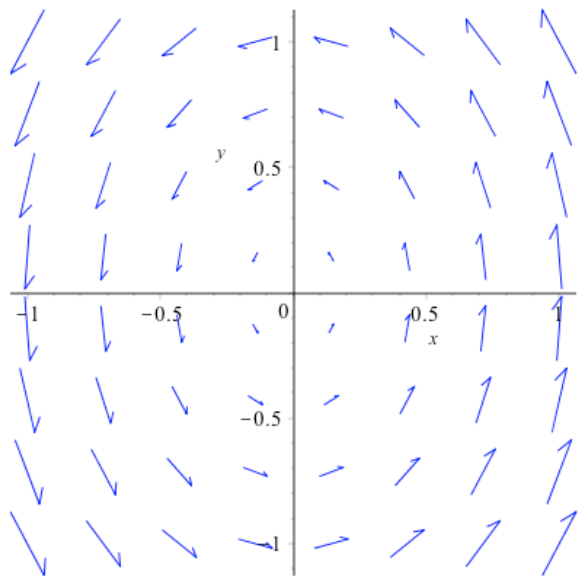
Rotasjonsfelt

$$\mathbf{F} = -k_1 y\,\mathbf{i} + k_2 x\,\mathbf{j} \quad (k_1 \cdot k_2 > 0)$$

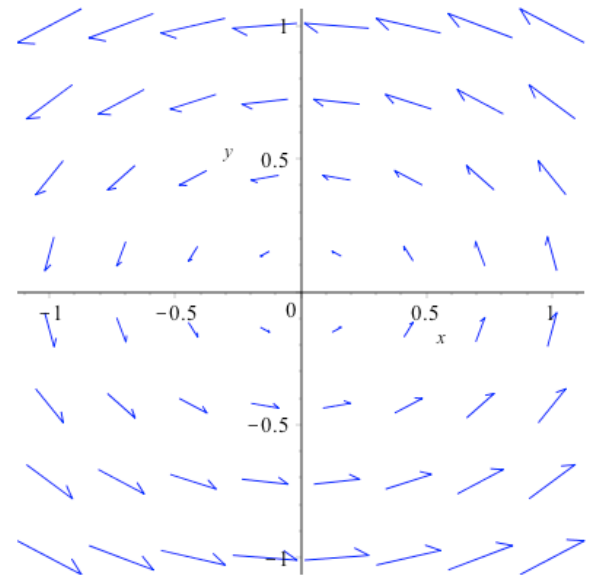
$k_1 = k_2 = 1$



$k_1 = 0{,}5 \;\; k_2 = 1$



$k_1 = 1 \;\; k_2 = 0{,}5$

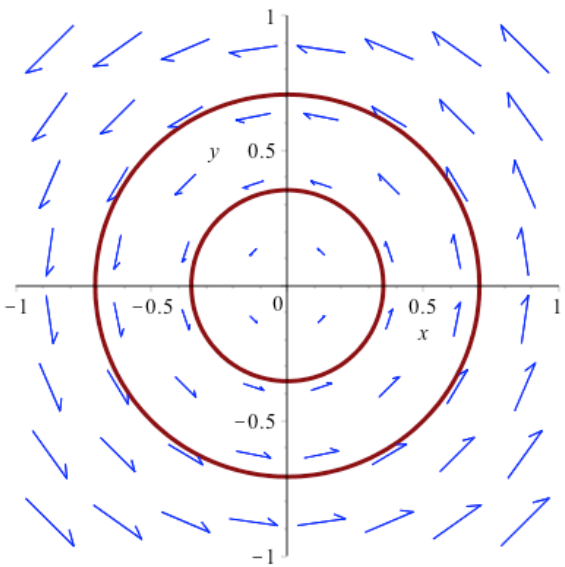


Hvordan ville det bli dersom både k_1 og k_2 var negative?

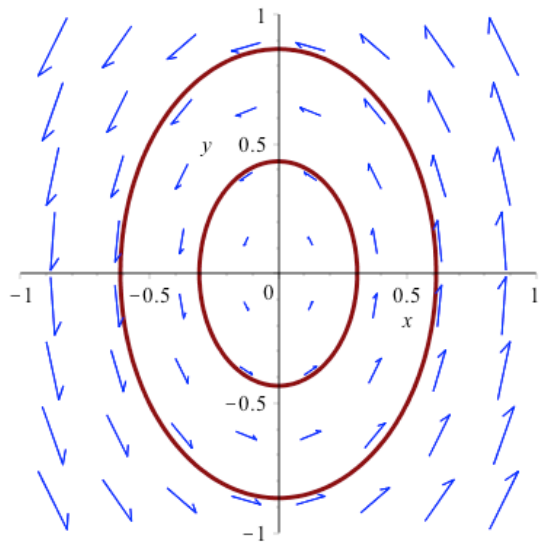
Rotasjonsfelt, med strømlinjer

$$\mathbf{F} = -k_1 y\,\mathbf{i} + k_2 x\,\mathbf{j} \quad (k_1 \cdot k_2 > 0)$$

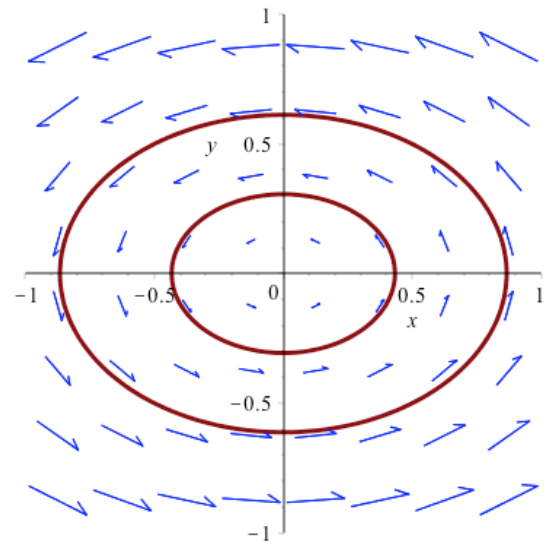
$k_1 = k_2 = 1$



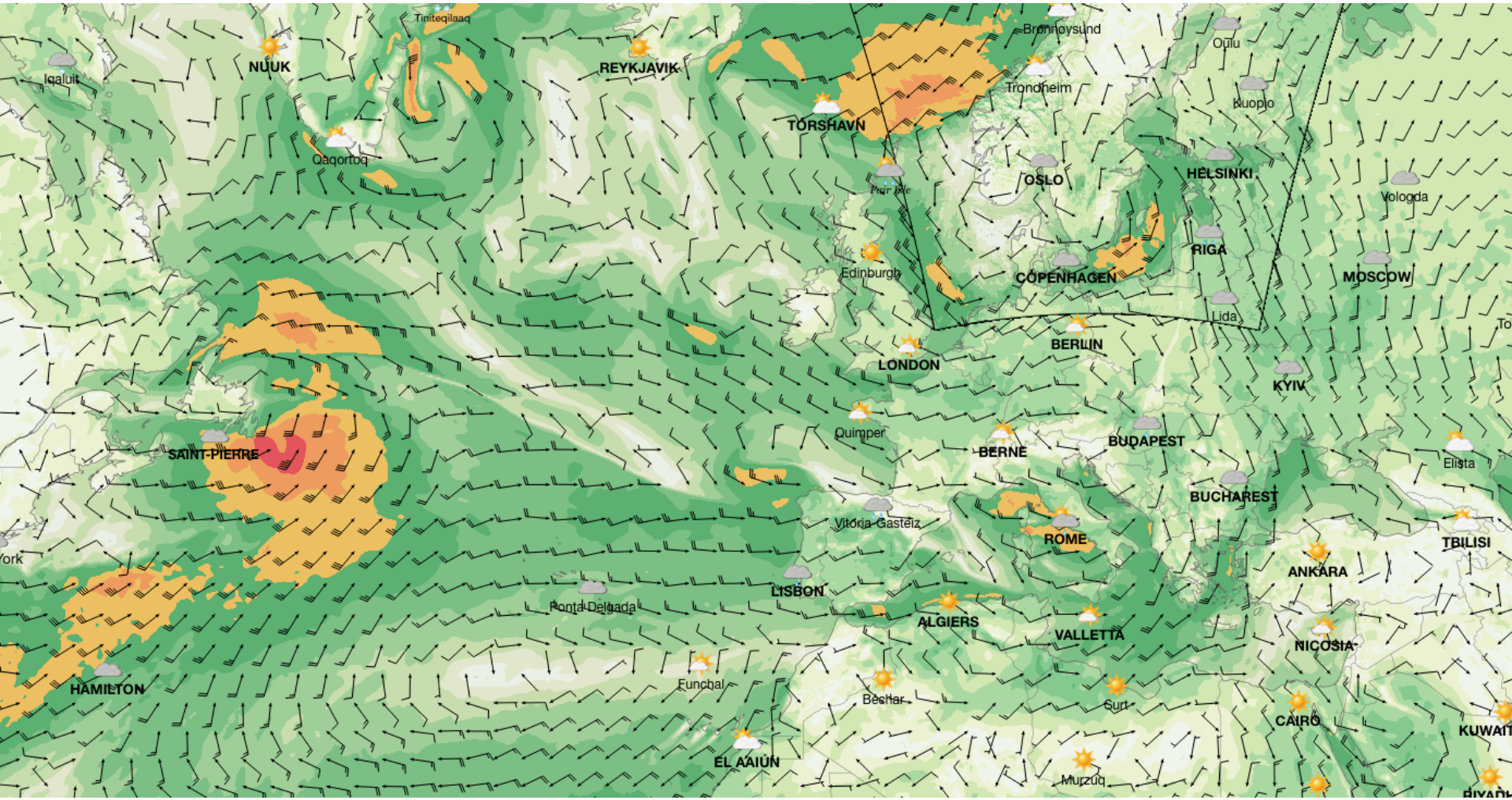
$k_1 = 0{,}5 \;\; k_2 = 1$



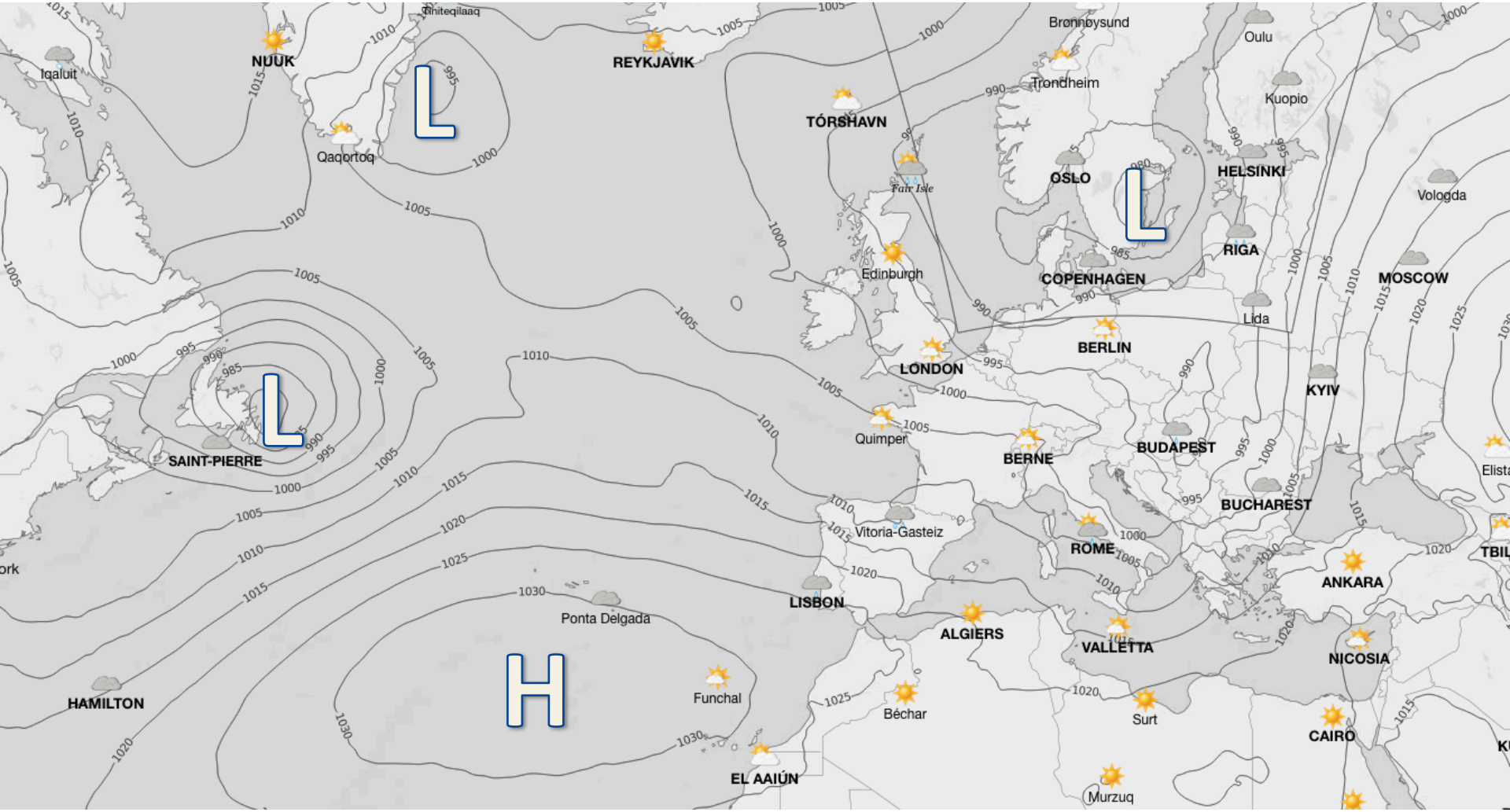
$k_1 = 1 \;\; k_2 = 0{,}5$



Vektorfelt (vind) (hentet fra yr.no)



Skalarfelt (trykk) (hentet fra yr.no)



Nøkkelbegreper uke 7

- Vektorfelt og skalare felt (15.1)
  - Glatte vektorfelt
  - Strømlinjer
- Konservative vektorfelt (15.2)
  - Nødvendige betingelser for konservative vektorfelt
- Linjeintegralet av vektorfelter (15.4)
  - Sirkulasjon – linjeintegralet rundt en lukket kurve
  - Teorem: Uavhengighet av integrasjonskurven for konservative vektorfelter

Konservative vektorfelt

Gitt et vektorfelt $\mathbf{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$.

Finnes det et skalarfelt $\varphi(x,y,z)$ slik at $\nabla\varphi = \mathbf{F}$?

Et vektorfelt som har denne egenskapen kalles **konservativt**

(Begrepet **gradientfelt** brukes også)

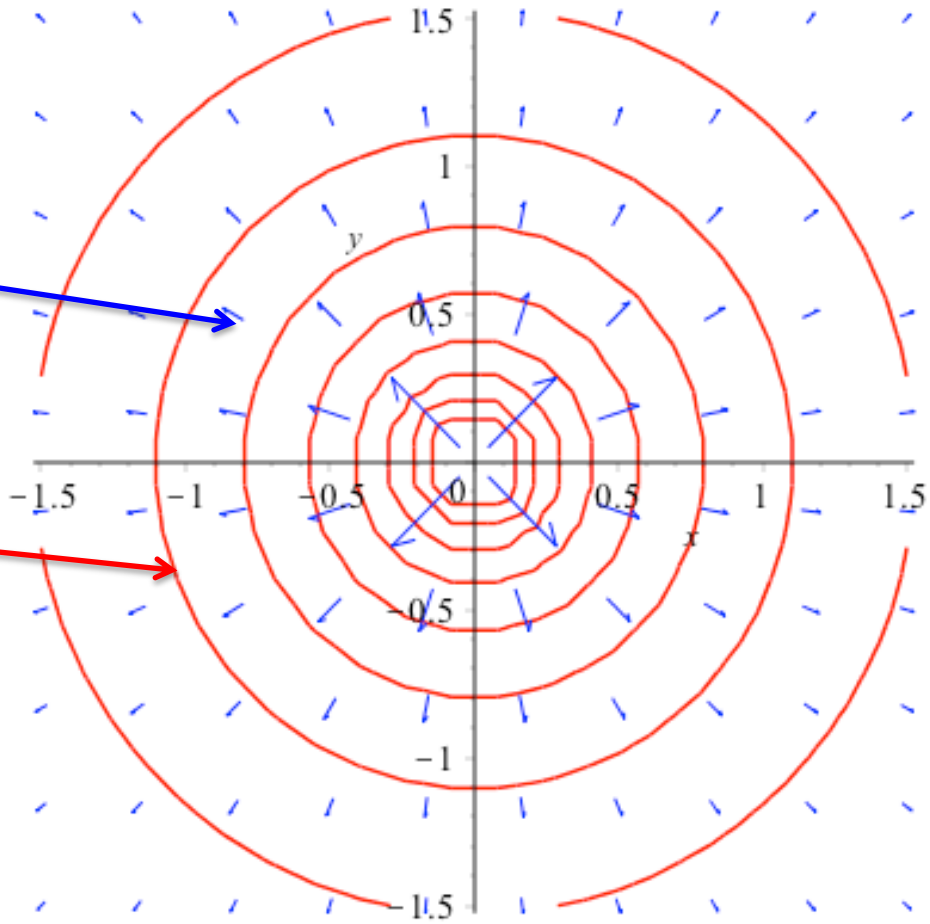
Hvordan kan man avgjøre om et gitt vektorfelt er **konservativt**?

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j} = \nabla\varphi(x,y)$$

Vektorfeltet **F**

Nivåkurvene til φ



Nøkkelbegreper uke 7

- Vektorfelt og skalare felt (15.1)
  - Glatte vektorfelt
  - Strømlinjer
- Konservative vektorfelt (15.2)
  - Nødvendige betingelser for konservative vektorfelt
- Linjeintegralet av vektorfelter (15.4)
  - Sirkulasjon – linjeintegralet rundt en lukket kurve
  - Teorem: Uavhengighet av integrasjonskurven for konservative vektorfelter

Uavhengighet av veivalg

La D være et åpent, sammenhengende område og $\mathbf{F}$ et glatt vektorfelt på D.

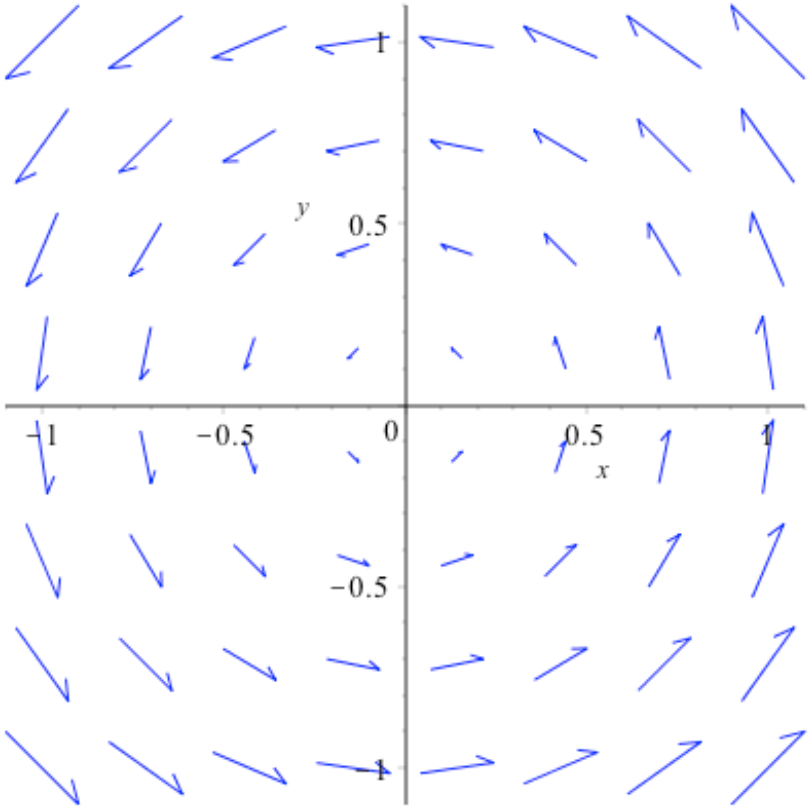
Følgende er ekvivalent:

(a) $\mathbf{F}$ er konservativt i D.

(b) $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$ for hver stykkevis glatt, lukket kurve C i D.

(c) $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ har samme verdi for alle stykkevis glatte kurver C som forbinder to gitte punkter P_0 og P_1

$$\mathbf{G}(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$



Ikke konservativt

Linjeintegralet mellom to punkter vil avhenge av veivalget