TMA4105

Notat om skalarfelt

Ulrik Skre Fjordholm

15. april 2016

Innhold

Notasjon. Med *skalarfelt* menes en skalar funksjon f som avhenger av flere variable. Vi holder oss i dette notatet stort sett til skalarfelt av to variable $f(x, y)$, men nesten alt lar seg generalisere til skalarfelt av tre eller flere variable. Vi betegner vektorer med fet skrift: $\mathbf{x} = (x, y)$ (uttales «x-vektor» for ikke å forveksle med x). Basisvektorene i planet skriver vi som $\mathbf{i} = (1, 0)$ og $\mathbf{j} = (0, 1)$, og basisvektorene i rommet som $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ og $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Lengden (eller *normen*) til en vektor $\mathbf{x} = (x, y)$ er det ikkenegative tallet $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. En vektor med d komponenter $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ har lengde

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}.$$

Prikkproduktet eller *indreproduktet* mellom to vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ er gitt ved

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d.$$

Merk at $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$. *Definisjonsmengden* $\mathcal{D}(f)$ til et skalarfelt f er mengden av alle punkter $\mathbf{x}$ der f er definert.

1 Grenseverdier og kontinuitet

La $f(x)$ være en funksjon av én variabel. Vi skriver

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

(«$f(x)$ går mot a når x går mot x_0») dersom det for ethvert tall $\varepsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at

$$|f(x) - a| < \varepsilon \qquad \text{når } x \text{ er slik at} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

På samme måte kan vi definere grenseverdier for skalarfelt.

Definisjon. La f være et skalarfelt. Vi skriver

$$\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = a$$

(«$f(\mathbf{x})$ går mot a når $\mathbf{x}$ går mot $\mathbf{x}_0$») dersom det for ethvert tall $\varepsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at

$$|f(\mathbf{x}) - a| < \varepsilon \qquad \text{når } \mathbf{x} \text{ er slik at} \qquad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta.$$

Merk her at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}_0$ er vektorer, så når vi skriver $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ mener vi *lengden* til vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Den eneste forskjellen fra definisjonen for grenseverdier av énvariabefunksjoner er altså at vi må måle avstanden mellom punktene med vektornormen ($|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$) istedenfor med absoluttverdien ($|x - x_0|$).

Vi har en rekke regneregler for grenseverdier:

Teorem 1. La f og g være skalarfelt slik at $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = a$ og $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b$. Da er

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\big(f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})\big) = a \pm b$
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\big(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\big) = ab$
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right) = \frac{a}{b}$ (så lenge $b \neq 0$)
- Hvis $h(t)$ er en kontinuerlig funksjon, er $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(f(\mathbf{x})) = h(a)$.

Beviset for teorem 1 er en god øvelse i kalkulus – prøv å gjøre det selv!

Vi definerer *kontinuitet* av skalarfelt ved hjelp av grenseverdier:

Definisjon. Et skalarfelt f er *kontinuerlig i punktet* $\mathbf{x}_0$ dersom

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Hvis f ikke er kontinuerlig i $\mathbf{x}_0$ sier vi at f *er diskontinuerlig i* $\mathbf{x}_0$. Vi sier at f er *kontinuerlig* dersom f er kontinuerlig i alle punkter.

Ved hjelp av teorem 1 er det ikke vanskelig å bevise følgende resultat:

Teorem 2.

(i) Hvis $f(\mathbf{x})$ og $g(\mathbf{x})$ er kontinuerlige i $\mathbf{x}_0$ og c er en konstant, så er også

$$cf(\mathbf{x}), \qquad f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \qquad f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \qquad \text{og} \qquad f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$$

kontinuerlige i $\mathbf{x}_0$, og det er også $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ så lenge $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$.

(ii) Alle polynomer (for eksempel $f(x, y) = 2x^4y^3 - 2x + xy^2 + 10$) er kontinuerlige.

(iii) Hvis $f(\mathbf{x})$ er kontinuerlig i $\mathbf{x}_0$ og $h(t)$ er en kontinuerlig funksjon, så er også $h(f(\mathbf{x}))$ kontinuerlig i $\mathbf{x}_0$.

Eksempel. *Bestem i hvilke punkter skalarfeltet*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinuerlig.

Både teller og nevner i uttrykket $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ er polynomer, så av teorem 2*(i)* og *(ii)* er dette uttrykket kontinuerlig så lenge nevneren $x^2 + y^2$ er ulik 0. Dette skjer kun i origo, så vi kan konkludere at f er kontinuerlig i alle andre punkter enn origo.

Vi må behandle origo for seg selv. La $\varepsilon > 0$ være et gitt tall. Velg $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ slik at $|\mathbf{x} - \mathbf{0}| = |\mathbf{x}| < \delta$ for ett eller annet tall $\delta > 0$. Da er både $x^2 \leqslant |\mathbf{x}|^2 < \delta^2$ og $y^2 \leqslant |\mathbf{x}|^2 < \delta^2$, og følgelig må også

$$x^2y^2 \leqslant |\mathbf{x}|^2y^2 < |\mathbf{x}|^2\delta^2.$$

Altså vil

$$|f(\mathbf{x})| = \frac{x^2y^2}{|\mathbf{x}|^2} < \frac{|\mathbf{x}|^2\delta^2}{|\mathbf{x}|^2} = \delta^2.$$

Hvis vi velger $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ så vil altså

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})| = |f(\mathbf{x})| < \delta^2 = \varepsilon \qquad \text{når } \mathbf{x} \text{ er slik at} \qquad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{0}| = |\mathbf{x}| < \delta.$$

Med andre ord er f kontinuerlig også i origo.

I noen tilfeller kan det være enklere å bruke polarkoordinater (eller kulekoordinater i tre dimensjoner) for å bevise (dis)kontinuitet. I eksempelet over ville dette sett ut som følger. Vi kan skrive funksjonen f i polarkoordinater som

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= \begin{cases} \frac{(r\cos(\theta))^2(r\sin(\theta))^2}{r^2} & \text{for } r > 0 \\ 0 & \text{for } r = 0 \end{cases} \\ &= r^2\cos(\theta)\sin(\theta). \end{aligned}$$

(Merk at vi her kunne slå de to uttrykkene sammen, siden uttrykket over er lik 0 når $r = 0$.) Funksjonen er fremdeles kontinuerlig vekk fra origo. For å se at funksjonen også er kontinuerlig i origo, estimerer vi

$$|f(r,\theta) - f(\mathbf{0})| = |r^2\cos(\theta)\sin(\theta)| \leqslant r^2,$$

som opplagt går mot 0 når vi nærmer oss origo.

Eksempel. *Bestem i hvilke punkter skalarfeltet*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinuerlig.

Som i forrige eksempel kan vi med én gang konkludere at f er kontinuerlig i alle andre punkter enn origo. Men for origo vil framgangsmåten fra forrige eksempel feile. Hvis vi går mot origo langs

x- eller y-aksen virker alt i orden:

$$f(0, y) = 0 = f(0, 0) \qquad \text{og} \qquad f(x, 0) = 0 = f(0, 0).$$

Men hvis nærmer oss origo langs diagonalen $x = y$ får vi

$$f(x, x) = \frac{xx}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

som definitivt *ikke* nærmer seg $f(0, 0) = 0$ når $x \to 0$. Altså er f *diskontinuerlig* i origo.

Også i dette eksempelet er det lettere å se oppførselen til f nær singularitetspunktet (origo) om vi bruker polarkoordinater. Vi kan skrive

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \begin{cases} \frac{(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))}{r^2} & \text{for } r > 0 \\ 0 & \text{for } r = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cos(\theta)\sin(\theta) & \text{for } r > 0 \\ 0 & \text{for } r = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Her ser vi at når vi nærmer oss origo (altså $r \to 0$) vil grenseverdien avhenge av hvilken retning (θ) vi kommer fra — for eksempel får vi langs diagonalen $x = y$ grenseverdien

$$\lim_{r \to 0} f(r, \tfrac{\pi}{4}) = \lim_{r \to 0} \cos(\tfrac{\pi}{4}) \sin(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

2 Derivasjon av skalarfelt

2.1 Partiellderivert og gradient

Om $f(x)$ er en funksjon av én variabel, er dens deriverte $\frac{df}{dx}(x)$ den nye funksjonen

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(såfremt den eksisterer). Vi tolker den deriverte $\frac{df}{dx}(x)$ som *stigningstallet* til funksjonen f i punktet x. Et skalarfelt $f(\mathbf{x})$ avhenger av flere variable, og det vil derfor være flere måter å definere et tilsvarende stigningstall på. De *partiellderiverte* til f har, som vi får se i seksjon 3, en spesiell betydning.

Definisjon. La $f(x, y)$ være et skalarfelt. De *partiellderiverte* til f er skalarfeltene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Vi sier at f er *partiellderiverbar* dersom begge disse grenseverdiene eksisterer. (Tegnet ∂ uttales «dell». Vi uttaler uttrykket $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ som «den partiellderiverte til f med hensyn på x, evaluert i punktet (x, y)».)

De partiellderiverte til f samles ofte i en vektor som kalles *gradienten*.

Definisjon. *Gradienten* til skalarfeltet $f(x, y)$ er den vektorvaluerte funksjonen

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

Om f avhenger av d variable $x_1, x_2, \dots, x_d$ er gradienten til f definert som

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x})\right).$$

(Tegnet ∇ uttales «nabla» eller «grad».)

Gradienten er det nærmeste vi kommer en «derivert» av et skalarfelt. Som vi skal se senere inneholder gradienten $\nabla f(x, y)$ *all* informasjon om endringen til f i punktet (x, y) (i alle fall når f er *deriverbar* — se seksjon 3.1).

2.2 Kjerneregelen og andre regneregler

Hvis vi sammenligner definisjonen av de partiellderiverte med den deriverte av en funksjon av én variabel, ser vi en nær likhet. Dette gir oss et hint om hvordan vi regner ut de partiellderiverte. For å regne ut for eksempel $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tar vi uttrykket for $f(x, y)$, betrakter y (og alle andre variable som f eventuelt måtte avhenge av) som en konstant, og deriverer med hensyn på x på vanlig måte. Dette betyr at alle regnereglene vi har for énvariabelfunksjoner er gyldige for skalarfelter. For eksempel er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(cf(x,y)) &= c\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) && \text{(der } c \text{ er en konstant)}\\
\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)+g(x,y)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\\
\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)g(x,y)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)g(x,y)+f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{g(x,y)}-\frac{f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{g(x,y)^2} && \text{(så lenge } g(x,y)\neq 0)\\
\frac{\partial}{\partial x}(h(f(x,y))) &= h'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) && \text{(for en deriverbar funksjon } h(t))
\end{aligned}$$

og tilsvarende for $\frac{\partial}{\partial y}$. Alle disse regnereglene kan skrives enkelt ved hjelp av gradienten:

Teorem 3. La $f(\mathbf{x})$ og $g(\mathbf{x})$ være partiellderiverbare skalarfelt og la c være en konstant. Da er

$$\begin{aligned}
\nabla(cf(\mathbf{x})) &= c\nabla f(\mathbf{x}),\\
\nabla(f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})) &= \nabla f(\mathbf{x})+\nabla g(\mathbf{x}),\\
\nabla(f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})) &= \nabla f(\mathbf{x})-\nabla g(\mathbf{x}),\\
\nabla(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) &= f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}),\\
\nabla\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right) &= \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}-\frac{f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2} \qquad \text{(så lenge } g(\mathbf{x})\neq 0)
\end{aligned}$$

og om $h(t)$ er en deriverbar funksjon, er

$$\nabla(h(f(\mathbf{x}))) = h'(f(\mathbf{x}))\nabla f(\mathbf{x}).$$

Oppgave 1. *Skriv ut komponentene til hvert av uttrykkene i teoremet over.*

2.3 Eksempler

Eksempel. *Beregn gradienten til skalarfeltet* $f(x,y)=x^2y^3-\sin(2y)$.

Gradienten består av de partiellderiverte til f, så vi må finne $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$. For å beregne $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ betrakter vi y som en konstant, og deriverer med hensyn på x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^3-\sin(2y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}x^2y^3-\frac{\partial}{\partial x}\sin(2y)=2xy^3.$$

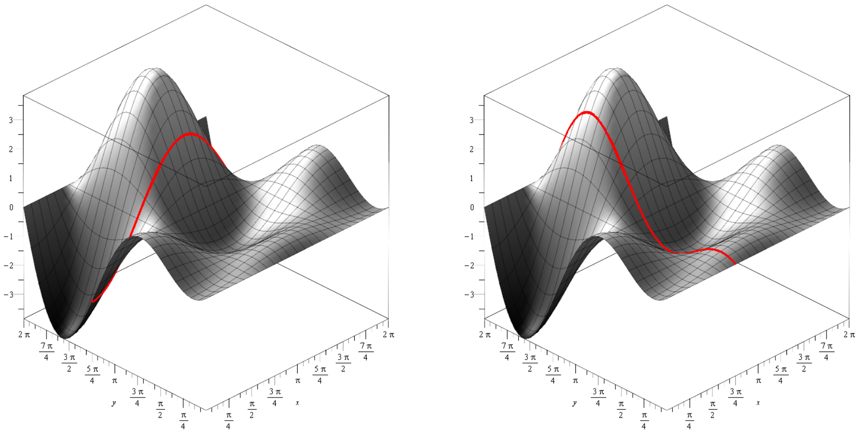
Leddet $\sin(2y)$ avhenger ikke av x, og er derfor som en konstant å regne. Den deriverte av en konstant er lik 0, så dette leddet forsvinner i det endelige svaret.

Vi finner $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ på samme måte:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3-\sin(2y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}x^2y^3-\frac{\partial}{\partial y}\sin(2y)=3x^2y^2-2\cos(2y).$$

Her brukte vi kjerneregelen for å derivere leddet $\sin(2y)$ med hensyn på y. Vi konkluderer med at gradienten til f er

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy^3,\ 3x^2y^2 - 2\cos(2y)\right).$$



(a) Kurven $z = f(x,b)$, der $b = \frac{5\pi}{4}$

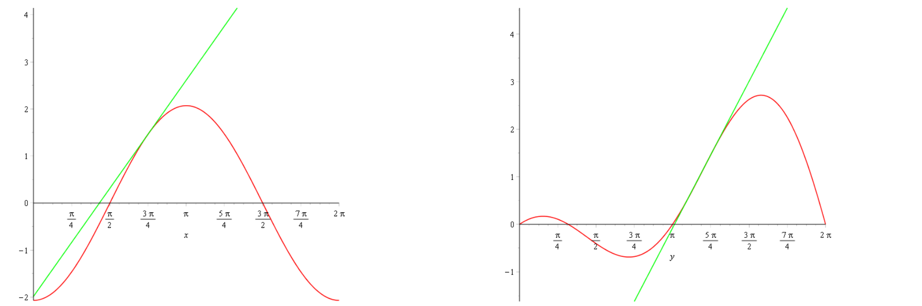
(b) Kurven $z = f(a,y)$, der $a = \frac{3\pi}{4}$

Figur 1: Grafen til $f(x,y)$

Figur 1 viser grafen $z = f(x,y)$ til skalarfeltet

$$f(x,y) = (y-1)\sin(y)\cos(x).$$

Om vi fryser for eksempel $y = b = \frac{5\pi}{4}$ får vi en funksjon som bare avhenger av x (rød kurve i figur 1(a)), mens hvis vi fryser $x = a = \frac{3\pi}{4}$ får vi en funksjon av y (rød kurve i figur 1(b)). De partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ gir oss stigningstallene til disse funksjonene i henholdsvis punktene $x = a$ og $y = b$; se figur 2. Med andre ord *sier de partiellderiverte oss hvor mye skalarfeltet endrer seg i den retningen vi deriverer.*



(a) Grafen til $f(x,b)$ og tangenten i $x = a$. Den grønne tangenten har stigningstall $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$

(b) Grafen til $f(a,y)$ og tangenten i $y = b$. Den grønne tangenten har stigningstall $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

Figur 2: Grafen til $f(x,b)$ og $f(a,y)$

Eksempel. *Endrer skalarfeltet $f(x, y) = 3x^2y - xy$ seg mest i x- eller y-retning i punktet $(x, y) = (4, 2)$?*

Vi partiellderiverer først og setter så inn $(x, y) = (4, 2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - x.$$

Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4, 2) = 6 \cdot 4 \cdot 2 - 2 = 48 - 2 = 46, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4, 2) = 3 \cdot 4^2 - 4 = 44,$$

så i punktet $(4, 2)$ endrer f seg litt fortere i x-retning enn i y-retning.

På samme måte som at ikke alle funksjoner av én variabel er deriverbare, er ikke alle skalarfelt partiellderiverbare.

Eksempel. *I hvilke punkter er de partiellderiverte til $f(x, y) = |xy|$ definert?*

Funksjonen $g(t) = |t|$ er ikke deriverbar i $t = 0$ fordi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

mens

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Siden grenseverdien avhenger av retningen vi beveger oss mot punktet $t = 0$, er ikke grenseverdien definert. På samme måte ser vi at funksjonen $g(t) = c|t|$ er ikkederiverbar i $t = 0$ for en hvilken som helst konstant $c \neq 0$. (Hvorfor er g deriverbar når $c = 0$?)

Hvis vi skriver f på formen $f(x, y) = |y| \cdot |x|$ og forsøker å derivere med hensyn på x, ser vi at så lenge $y \neq 0$ vil ikke $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ eksistere i punktet $x = 0$. På samme måte vil ikke $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ eksistere i punktet $y = 0$ så lenge $x \neq 0$. Vi konkluderer med at

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ eksisterer når } y = 0, \text{ samt når både } y \neq 0 \text{ og } x \neq 0,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ eksisterer når } x = 0, \text{ samt når både } x \neq 0 \text{ og } y \neq 0.
\end{aligned}$$

Notasjon. Det finnes mange forskjellige måter å skrive den partiellderiverte på. Noen av disse er:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f, \quad \partial_x f, \quad f_x, \quad D_x f, \quad f_1.$$

3 Deriverbare skalarfelt

3.1 Deriverbarhet

De partiellderiverte til et skalarfelt i planet gir oss stigningstallet til skalarfeltet i x- og y-retningene. Men det finnes uendelig mange andre retninger vi kan bevege oss i — én for hver retning $\mathbf{u}$ i planet. For å finne stigningstallet til f i retning $\mathbf{u}$ kan vi beregne den *retningsderiverte.* Av tekniske grunner vil vi alltid la retningsvektoren $\mathbf{u}$ ha lengde $|\mathbf{u}| = 1$, så om vi vil finne den retningsderiverte i en vilkårlig retning $\mathbf{v}$ må vi først normalisere vektoren: $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. (Unntaket er nullvektoren $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, som ikke har en veldefinert retning.)

Definisjon. La f være et skalarfelt og $\mathbf{u}$ en vektor med lengde $|\mathbf{u}| = 1$. Den *retningsderiverte* til f i retning $\mathbf{u}$ i punktet $\mathbf{x}$ er gitt ved

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h},$$

så sant grenseverdien eksisterer.

Den retningsderiverte forteller oss hvor mye f endrer seg dersom vi står i punktet $\mathbf{x}$ og beveger oss i retning $\mathbf{u}$. Det er lett å se at de partiellderiverte er spesialtilfeller av den retningsderiverte: Om $f(x, y)$ er et skalarfelt av to variable er for eksempel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{i}) - f(\mathbf{x})}{h} = D_{\mathbf{i}} f(\mathbf{x})$$

der $\mathbf{i} = (1, 0)$ og $\mathbf{x} = (x, y)$. På samme måte er $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{j}} f(\mathbf{x})$. Den retningsderiverte er altså en generalisering av de partiellderiverte. I mange tilfeller holder det likevel å kjenne de partiellderiverte til f for å kunne beregne de retningsderiverte. Hvis vi vil beregne den retningsderiverte til $f(x, y)$ i punktet $\mathbf{x} = (x, y)$ i retning $\mathbf{u} = (u, v)$, får vi

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h} && \text{(per definisjonen)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hu, y + hv) - f(x, y)}{h} && \text{(legger sammen vektorene)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hu, y + hv) - f(x, y + hv) + f(x, y + hv) - f(x, y)}{h} && \text{(legger til og trekker fra } f(x, y + hv)\text{)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hu, y + hv) - f(x, y + hv)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + hv) - f(x, y)}{h} && \text{(deler i to)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hu, y) - f(x, y)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + hv) - f(x, y)}{h} && \textbf{(stemmer ikke alltid!)} \\
&= \lim_{h_1\to 0} u \frac{f(x + h_1, y) - f(x, y)}{h_1} + \lim_{h_2\to 0} v \frac{f(x, y + h_2) - f(x, y)}{h_2} && \text{(setter } h_1 = uh,\ h_2 = vh\text{)} \\
&= u \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) && \text{(definisjon av partiellderiverte)} \\
&= \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Vi ser altså at den retningsderiverte kan skrives ved hjelp av gradienten, *gitt at utregningen over er riktig!* Det er ett av stegene i utregningen over som ikke stemmer for alle skalarfelt, og det er steget fra linje 4 til linje 5. Hvis det derimot viser seg at f har den egenskapen at utregningen over er korrekt, kaller vi f *deriverbar*.

Definisjon. Et skalarfelt f er *deriverbart i punktet* $\mathbf{x}$ dersom den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ eksisterer i alle retninger $\mathbf{u}$ med lengde $|\mathbf{u}| = 1$, og hvis

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \qquad \text{for alle } \mathbf{u}.$$

Vi sier at f er *deriverbart* hvis f er deriverbart i alle punkter $\mathbf{x}$.

Litt uformelt kan vi si at et skalarfelt er deriverbart dersom gradienten inneholder all informasjon om de retningsderiverte til skalarfeltet. Man kan vise at følgende er en *ekvivalent* definisjon av deriverbarhet:

Definisjon. Et skalarfelt f er *deriverbart* i et punkt $\mathbf{x}$ dersom

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{h}\cdot\nabla f(\mathbf{x})}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

3.2 Når er et skalarfelt deriverbart?

Det er ofte teknisk vanskelig å sjekke de nøyaktige betingelsene for deriverbarhet av et skalarfelt. Heldigvis finnes det en rekke tilstrekkelige betingelser for når et skalarfelt er deriverbar, som er lettere å sjekke.

Teorem 4.

(i) Hvis f har kontinuerlige partiellderiverte i en omegn om $\mathbf{x}$, så er f deriverbar i $\mathbf{x}$.

(ii) Hvis $f(\mathbf{x})$ og $g(\mathbf{x})$ er deriverbare skalarfelt og c er en konstant, så er også

$$cf(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \quad \text{og} \quad f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$$

deriverbare, og det er også $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ så lenge $g(\mathbf{x}) \neq 0$.

(iii) Alle polynomer (for eksempel $f(x, y) = 2x^4y^3 - 2x + xy^2 + 10$) er deriverbare.

(iv) Hvis $f(\mathbf{x})$ er et deriverbart skalarfelt og $h(t)$ er en deriverbar funksjon, så er også

$$h(f(\mathbf{x}))$$

deriverbar.

Bevis.

(i) Hvis de partiellderiverte til f er kontinuerlige i nærheten av $\mathbf{x}$, stemmer utregningen fra linje 4 til linje 5 på side 9. Dermed er f deriverbar, per definisjon.

(ii) Vi tar $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ som et eksempel:

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}(f+g)(\mathbf{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) + g(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h} + \frac{g(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) - g(\mathbf{x})}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) - g(\mathbf{x})}{h} \\
&= D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) + D_{\mathbf{u}}g(\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{u}\cdot\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}\cdot\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{u}\cdot\nabla(f+g)(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

(iii) Alle polynomer er summer og produkter av skalarfeltene $g_1(\mathbf{x}) = x_1$, $g_2(\mathbf{x}) = x_2$ og så videre. Det er enkelt å sjekke at disse er deriverbare, og av *(ii)* må også deres summer og produkter være deriverbare.

(iv) Oppgave til leseren! □

Eksempel. *Vis at skalarfeltet* $f(x, y, z) = e^{3xy-z} + 2xz^2 - 3\cos(2xy)$ *er deriverbart, og finn den retningsderiverte til* f *i punktet* $\mathbf{x} = (0,\ 1,\ 0)$ *i retning* $\mathbf{u} = (\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 0)$.

Skalarfeltet f kan skrives som summen av de tre skalarfeltene e^{3xy-z}, $2xz^2$ og $-3\cos(2xy)$. Vi benytter oss av punkt *(ii)*, *(iii)* og *(iv)* i teorem 4:

- Skalarfeltet $3xy - z$ er et polynom, og er dermed deriverbart. Funksjonen $h(t) = e^t$ er deriverbar, så det er dermed også skalarfeltet e^{3xy-z}.
- Skalarfeltet $2xz^2$ er et polynom, og er dermed deriverbart.
- Skalarfeltet $2xy$ er et polynom, og er dermed deriverbart. Funksjonen $h(t) = \cos(t)$ er deriverbar, så det er dermed også skalarfeltet $\cos(2xy)$. Tallet -3 er en konstant, så da er også $-3\cos(2xy)$ deriverbart.

Siden summen av deriverbare skalarfelt er deriverbar, konkluderer vi med at f er deriverbar. Per definisjon kan vi da finne de retningsderiverte til f ved hjelp av gradienten til f. Denne er gitt ved:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right).$$

Vi regner ut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{3xy-z} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(3xy - z) + 2z^2 - 3(-\sin(2xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}2xy = 3ye^{3xy-z} + 2z^2 + 6y\sin(2xy), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 3xe^{3xy-z} + 6x\sin(2xy), \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -e^{3xy-z} + 4xz.
\end{aligned}$$

I punktet $\mathbf{x} = (0, 1, 0)$ får vi altså

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (3,\ 0,\ -1).$$

Retningsvektoren $\mathbf{u}$ har lengde $|\mathbf{u}| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$, så vi trenger ikke normalisere $\mathbf{u}$. Vi får:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = (\tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ 0) \cdot (3,\ 0,\ -1) = \frac{9}{5}.$$

I punktet $\mathbf{x}$ har altså f stigningstall $\frac{9}{5}$ i retning $\mathbf{u}$.

Eksempel. *Skalarfeltet*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \textit{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \textit{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

har alle retningsderiverte i origo, men er ikke deriverbar.

Vi beregner de retningsderiverte til f i origo: Om $\mathbf{u} = (a, b)$ er

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\mathbf{u})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^3a^2b}{h^2(a^2+b^2)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3}\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$$
$$= \frac{a^2b}{a^2+b^2} = a^2b,$$

hvor vi har brukt at $a^2 + b^2 = |\mathbf{u}|^2 = 1$. Fra dette finner vi lett at $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = D_{\mathbf{i}} f(\mathbf{0}) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) = D_{\mathbf{j}} f(\mathbf{0}) = 0$. Altså er $\nabla f(\mathbf{0}) = (0, 0)$. Men om vi setter inn f.eks. $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ får vi

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad \text{som } \textit{ikke} \text{ er lik} \qquad \mathbf{u}\cdot\nabla f(\mathbf{0}) = 0.$$

Altså er f *ikke* deriverbar i origo.

3.3 En kjerneregel

I teorem 3 så vi en rekke regneregler for (partiell-)derivasjon av skalarfelt. Den eneste betingelsen på skalarfeltene var at de var *partiellderiverbare*. Som vi har sett finnes det skalarfelt som er partiellderiverbare, men ikke deriverbare. Den siste regneregelen vi skal se på — en «kjerneregel» — krever at skalarfeltet er *deriverbart*. Den gir oss et uttrykk for den deriverte av en *sammensatt funksjon*.

Teorem 5. La $f(\mathbf{x})$ være et deriverbart skalarfelt og la $\mathbf{r}(t)$ være en deriverbar, vektorvaluert funksjon. Da er funksjonen $f(\mathbf{r}(t))$ deriverbar, og

$$\frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t))) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

Beviset følger samme gang som beviset for kjerneregelen for énvariabelfunksjoner. For et skalarfelt av to variable $f(x, y)$ og en vektorvaluert funksjon $\mathbf{r}(t) = (u(t), v(t))$ kan vi skrive ut kjerneregelen slik:

$$\frac{d}{dt}\Big(f(u(t), v(t))\Big) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t))u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))v'(t).$$

Eksempel. *Anne går på tur i et kupert terreng beskrevet av skalarfeltet $h(x, y) = 2 + \frac{\sin(x)\cos(y)}{10}$, der (x, y) er koordinatene (i km) på kartet hun har med, og $h(x, y)$ er høyden over havet (i km) i punktet (x, y). Etter t timer befinner hun seg i punktet med koordinater $(x, y) = \mathbf{r}(t) = (3t, 4t)$ (se figur 3). Hvor bratt er det der hun befinner seg etter to timer?*

Vi kan løse denne oppgaven på to måter: én som bruker kjerneregelen, og én som er mer direkte.

1. Anne beveger seg med hastighet $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (3,\ 4)$ og fart $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)| = \big|(3,\ 4)\big| = 5$ km/t i horisontal retning. Om vi finner farten i vertikal retning kan vi finne ut hvor bratt det er. Etter t timer befinner Anne seg $h(\mathbf{r}(t))$ km over havet. Vi finner $\frac{d}{dt}h(\mathbf{r}(t))$ ved hjelp av kjerneregelen. Siden

$$\nabla h(x, y) = \frac{1}{10}(\cos(x)\cos(y),\ -\sin(x)\sin(y))$$

får vi

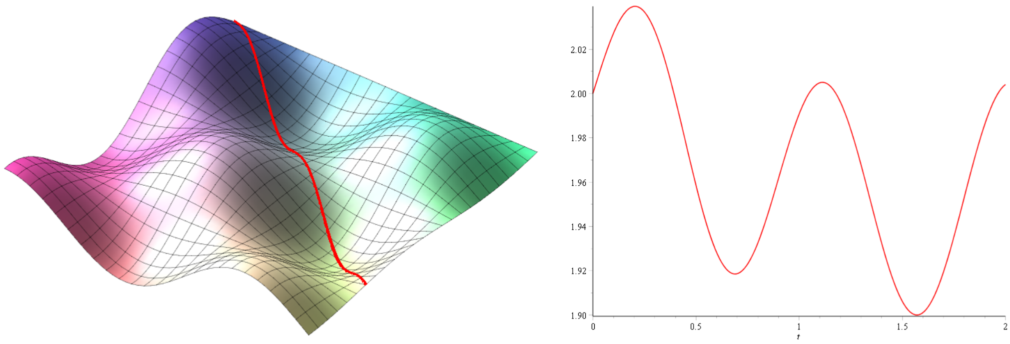
$$\frac{d}{dt}h(\mathbf{r}(t)) = \nabla h(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{1}{10}(3\cos(3t)\cos(4t) - 4\sin(3t)\sin(4t)),$$

som i $t = 2$ har verdien $\frac{d}{dt}h(\mathbf{r}(t))\Big|_{t=2} \approx -0.17$, det vil si en (negativ) stigning på ca. -170 meter i timen. Vi får altså en helning på

$$\frac{0.17}{5} \approx 0.034, \qquad \text{eller } 3.4\%.$$

2. Anne beveger seg med hastighet $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (3,\ 4)$. Etter to timer befinner hun seg i punktet med koordinater $\mathbf{r}(2) = (6,\ 8)$. Vi finner den retningsderiverte til h i punktet $\mathbf{x} = (6,\ 8)$ i retning $\mathbf{u} = \frac{1}{|(3,4)|}(3,\ 4) = \frac{1}{5}(3,\ 4)$:

$$D_{\mathbf{u}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot h(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(3,\ 4) \cdot \frac{1}{10}(\cos(6)\cos(8),\ -\sin(6)\sin(8)) \approx 0.034.$$



Figur 3: Annes tur i terrenget. Til venstre: Grafen til skalarfeltet $h(x, y)$ med Annes sti markert. Til høyre: Grafen til funksjonen $h(\mathbf{r}(t))$.

Merknad. Vær forsiktig når du deriverer sammensatte skalarfelt! Ta eksempelet

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x + y).$$

Dette leser vi som «den partiellderiverte til f med hensyn på x, evaluert i punktet $(x, x + y)$». Dersom vi derimot vil beregne den partiellderiverte til skalarfeltet $f(x, x + y)$ må vi bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\big(f(x, x + y)\big) &= \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x, x + y) + \frac{\partial (x + y)}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, x + y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, x + y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x + y). \end{aligned}$$

Dersom for eksempel $f(x, y) = xy$, er $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$, så

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x + y) = x + y,$$

mens

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x, x + y)\big) = x + y + x = 2x + y.$$

Vi får altså et annet svar om vi først deriverer og så setter inn, enn om vi først setter inn og så deriverer.

3.4 Hva forteller gradienten oss?

La f være et deriverbart skalarfelt. Gradienten til f er en vektor, så den har både en lengde og en retning. Som vi skal se nå, er retningen til $\nabla f(\mathbf{x})$ nettopp *den retningen der f øker mest i punktet* $\mathbf{x}$. Lengden $|\nabla f(\mathbf{x})|$ sier *hvor mye f øker i denne retningen* — altså stigningstallet. Vi kan se hvorfor dette stemmer på to måter: Først ved direkte regning, og deretter — noe indirekte — ved å observere at *gradienten alltid står ortogonalt på nivåkurvene*.

Teorem 6. Hvis $f(\mathbf{x})$ er et deriverbart skalarfelt og $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, så er retningen $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{|\nabla f(\mathbf{p})|}$ den retningen der den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})$ er størst.

Bevis. Fra antagelsen om at f er deriverbart, vet vi at $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{p})$. Fra Cauchy–Schwartz-ulikheten får vi at

$$|D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})| = |\mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{p})| \leqslant |\mathbf{u}||\nabla f(\mathbf{p})|,$$

med likhet *kun* dersom $\mathbf{u}$ er parallell med $\nabla f(\mathbf{p})$. Altså er $|D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})|$ størst når $\mathbf{u}$ er parallell med $\nabla f(\mathbf{p})$, som (siden $|\mathbf{u}| = 1$) kun skjer når $\mathbf{u} = \pm\frac{\nabla f(\mathbf{p})}{|\nabla f(\mathbf{p})|}$. Isåfall er

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \pm\frac{\nabla f(\mathbf{p})}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \cdot \nabla f(\mathbf{p}) = \pm\frac{|\nabla f(\mathbf{p})|^2}{|\nabla f(\mathbf{p})|} = \pm|\nabla f(\mathbf{p})|.$$

«+ »-delen er positiv og «−»-delen negativ, så $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})$ må være størst når $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{|\nabla f(\mathbf{p})|}$. □

Teorem 7. Om f er deriverbart i (a, b) og $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, så står $\nabla f(a, b)$ ortogonalt på nivåkurven til f gjennom (a, b).

Bevis. La $\mathbf{r}(t)$ være en parametrisering av nivåkurven gjennom (a, b). Vi kan anta at $\mathbf{r}$ krysser (a, b) i $t = 0$, det vil si $\mathbf{r}(0) = (a, b)$. Siden f er konstant langs nivåkurvene må

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = 0.$$

Ved hjelp av kjerneregelen finner vi at

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t).$$

I $t = 0$ er $\mathbf{r}(t) = (a, b)$, så

$$\nabla f(a, b) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = 0.$$

Men $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0)$ er tangenten til nivåkurven i punktet $\mathbf{r}(0) = (a, b)$, så $\nabla f(a, b)$ står ortogonalt på nivåkurven. □

Nivåkurvene til f er kurver i planet hvor f er konstant — hvor f hverken vokser eller avtar. Om vi ønsker å bevege oss i den retning hvor f vokser *mest mulig* er det da logisk å bevege seg ortogonalt på nivåkurvene. Teorem 7 sier at dette er nettopp den retningen ∇f peker i, som stemmer helt overens med teorem 6!

4 Høyereordens partiellderiverte

Akkurat som vi kan derivere funksjoner av én variabel mer enn én gang, kan vi partiellderivere skalarfelt mer enn én gang. Slike deriverte kalles kollektivt *høyereordens partiellderiverte*. I motsetning til funksjoner av én variabel er det flere måter å partiellderivere på, og vi får dermed *flere* andre-, tredje- og høyereordens partiellderiverte. De andreordens partiellderiverte, for eksempel, betegner vi som følger:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Eksempel. *Finn alle andreordens deriverte til* $f(x, y) = xe^y - ye^x$.

Vi beregner først de førsteordens partiellderiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y - ye^x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y - e^x.$$

Så deriverer vi på nytt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^y - ye^x\right) = -ye^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y - e^x\right) = e^y - e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y - ye^x\right) = e^y - e^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^y - e^x\right) = xe^y.$$

I eksempelet over ser vi at de blandede deriverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er like. Dette gjelder også mer generelt: Så lenge skalarfeltet er «deriverbart nok», har rekkefølgen du partiellderiverer i ingenting å si!

Teorem 8. La $f(\mathbf{x})$ være et skalarfelt og $\mathbf{p}$ et punkt der f og alle dets partiellderiverte, opp til orden n, er kontinuerlige. Da spiller ikke rekkefølgen vi beregner $n$te ordens partiellderiverte til f i punktet $\mathbf{p}$ noen rolle.

For eksempel har vi at

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial z \partial x}$$

så lenge de tredje- og fjerdeordens partiellderiverte er kontinuerlige.

Notasjon. Merk at «Leibniz-notasjonen» $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og «subskriptnotasjonen» f_{xy} betegner derivasjon i motsatt rekkefølge:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{mens} \qquad f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

(Men hvis de andreordens partiellderiverte er kontinuerlige har rekkefølgen altså ingenting å si, og de to uttrykkene er like.)

5 Approksimasjon

Det finnes mange forskjellige måter å *approksimere* en funksjon av én variabel $f(t)$, men den viktigste av disse er taylorutviklingen. Med en *approksimasjon* av $f(t)$ mener vi en annen funksjon $g(t)$ som ligger nærme $f(t)$, men som gjerne er enklere å regne med (taylorutviklingen, for eksempel, er et polynom). Vi skal her se på *lineær* approksimasjon av et skalarfelt, som kan ses på som en førsteordens taylorutvikling, og deretter noen spesialtilfeller av den mer generelle taylorutviklingen av skalarfelt.

5.1 Lineær approksimasjon

La $f(t)$ være en funksjon av én variabel. Vi husker at f er deriverbar dersom grenseverdien

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer for alle punkter a i definisjonsmengden til f. Vi kan bruke dette uttrykket til å finne en *approksimasjon* til funksjonsverdien i punkter i nærheten av a: Om vi fryser $h > 0$ og løser for $f(a+h)$ får vi

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Vi kaller dette uttrykket en *lineær approksimasjon* av f rundt punktet a, og skriver

$$L(t) = f(a) + (t-a)f'(a) \tag{1}$$

(her har vi satt $t = a + h$). Dette er ikke noe annet enn taylorpolynomet av første orden til f rundt punktet a. Vi kan også tolke dette uttrykket geometrisk: Grafen til $L(t)$ er tangenten til grafen til f i punktet a.

Om $f(\mathbf{x})$ er et skalarfelt kan vi gjøre noe tilsvarende ved å bruke definisjonen av den retningsderiverte:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{p})}{h}.$$

Om vi igjen fryser $h > 0$, setter $\mathbf{x} = \mathbf{p} + h\mathbf{u}$ og løser for $f(\mathbf{x})$ får vi

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{p}) + hD_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}).$$

Hvis f er deriverbar (se definisjonen i seksjon 3.1) kan vi skrive $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{p})$. Siden $\mathbf{u} = \frac{1}{h}(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ blir $hD_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p}) = (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \nabla f(\mathbf{p})$, så vi ender vi opp med det følgende uttrykk:

Definisjon. Den *lineære approksimasjon* av et deriverbart skalarfelt f om punktet $\mathbf{p}$ er

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \nabla f(\mathbf{p}).$$

(Merk likheten til den lineære approksimasjonen av funksjoner av én variabel, ligning (1).) For skalarfelt av to variable kan vi skrive ut dette som

$$L(x, y) = f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Akkurat som for funksjoner av én variabel, kan vi tolke den lineære approksimasjonen geometrisk: *Grafen $z = L(x, y)$ til den lineære approksimasjonen er* tangentplanet *til grafen til f i punktet (a, b).*

Om punktet $\mathbf{x}$ ligger forholdsvis nærme punktet $\mathbf{p}$, gir den lineære approksimasjonen $L(\mathbf{x})$ en god tilnærming til den faktiske funksjonsverdien $f(\mathbf{x})$. Dette kan være veldig nyttig når man vil evaluere kompliserte funksjonsuttrykk.

Eksempel. *Finn tangentplanet til grafen til* $f(x, y) = x^2y^3 - xy + 3$ *i punktet* $(1, 1)$.

Vi finner først lineariseringen av f om punktet $(1, 1)$. Vi har $f(1, 1) = 3$ og

$$\nabla f(x, y) = \left(2xy^3 - y,\ 3x^2y^2 - x\right) \qquad \Rightarrow \qquad \nabla f(1, 1) = (1, 2).$$

Altså er

$$L(\mathbf{x}) = 3 + (x - 1, y - 1) \cdot (1, 2) = 3 + (x - 1) + 2(y - 2) = -2 + x + 2y.$$

Grafen til L er gitt ved $z = L(x, y)$, som gir oss

$$x + 2y - z = 2.$$

Eksempel. *Finn en tilnærming til* $f(x, y) = 2 + \sin(\pi xy + \ln y)$ *i punktet* $\mathbf{x} = (0.01, 1.05)$.

Punktet $\mathbf{p} = (0, 1)$ ligger nærme $\mathbf{x}$, så vi beregner den lineære approksimasjonen til f i $\mathbf{p}$. Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(\pi xy + \ln y) \cdot \pi y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(\pi xy + \ln y) \cdot \left(\pi x + \frac{1}{y}\right).$$

Om vi setter inn $(x, y) = \mathbf{p} = (0, 1)$, får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \cos(0 + \ln 1) \cdot \pi = \pi, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(0 + \ln 1) \cdot \left(0 + \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Altså er $\nabla f(\mathbf{p}) = (\pi, 1)$. Videre er $f(\mathbf{p}) = 2 + \sin(0 + \ln 1) = 2$. Vi får da den lineære approksimasjonen

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \nabla f(\mathbf{p}) = 2 + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\pi, 1) = 1 + \pi x + y.$$

Setter vi inn $(x, y) = (0.01, 1.05)$ får vi

$$L(0.01, 1.05) = 1 + 0.01\pi + 1.05 \approx 2.08.$$

Den nøyaktige verdien er $f(0.01, 1.05) \approx 2.0014$.

5.2 Taylorutvikling

Det $n$te ordens taylorpolynomet til en funksjon $g(t)$ om punktet $t = a$ er gitt ved

$$P_n(t) = g(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{g^{(i)}(a)}{i!}(t - a)^i,$$

der vi med $g^{(i)}(a)$ mener den i-te deriverte til g, evaluert i $t = a$. Vi antar altså at vi vet hva g (og dens deriverte) i punktet a er, og finner en tilnærming til $g(t)$ i et annet punkt t.

Vi kan bruke formelen over til å finne en taylorutvikling av et skalarfelt $f(\mathbf{x})$. La $\mathbf{p}$ være et punkt i definisjonsmengden til f, og anta at vi vil finne taylorpolynomet til f om $\mathbf{p}$ i punktet $\mathbf{x}$. Vi definerer

$$g(t) = f(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p})),$$

en funksjon av én variabel. Vi antar at vi vet hva f (og dens partiellderiverte) i punktet $\mathbf{p}$ er, og finner en tilnærming til $f(\mathbf{x})$. Siden $g(0) = f(\mathbf{p})$ og $g(1) = f(\mathbf{x})$ kan vi altså anta at vi vet $g(0)$, $g'(0)$ og så videre, og vil approksimere $g(1)$ ved hjelp av taylorpolynomet til g:

$$P_n(1) = g(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{g^{(i)}(0)}{i!}.$$

Dette gir oss taylorutviklingen til f:

Definisjon. Det $n$te ordens taylorpolynomet til et skalarfelt f om punktet $\mathbf{p}$ er

$$P_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{g^{(i)}(0)}{i!}, \qquad \text{der } g(t) = f\big(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p})\big).$$

Selv om det ikke er så klart ut ifra definisjonen, er P_n faktisk et polynom. Med et *n-tegrads polynom av d variabler* menes en sum av ledd på formen $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_d^{n_d}$ der potensene har sum høyst n, det vil si $n_1 + n_2 + \cdots + n_d \leqslant n$. For eksempel er $x^2 y^3$ et femtegrads polynom, mens $5 + 2x^3 - xy$ er et tredjegrads polynom.

Vi kan lett beregne P_1:

$$P_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{1} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} = f(\mathbf{p}) + g'(0).$$

Vi kan finne $g'(t)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p})) \cdot \frac{d}{dt}\big(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p})\big) = \nabla f(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}).$$

Altså er $g'(0) = (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \nabla f(\mathbf{p})$, så

$$P_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \nabla f(\mathbf{p}).$$

Den førsteordens taylorapproksimasjonen til f er altså lik den lineære approksimasjonen til f — akkurat som for funksjoner av én variabel!

6 Implisitte funksjoner

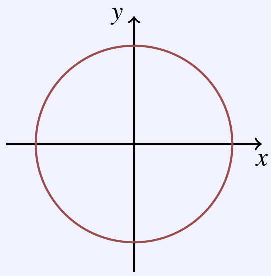
En *eksplisitt definert funksjon* er en funksjon $y(x)$ gitt på formen

$$y(x) = \dots$$

der høyresiden bare avhenger av x, for eksempel $y(x) = \sin(x^3) - e^{2x}$. Grafen til $y(x)$ er et eksempel på en kurve i planet. Motsatt kan vi spørre oss: Gitt en kurve i planet, kan vi finne en funksjon $y(x)$ hvis graf er lik kurven?

Eksempel. Betrakt uttrykket for en sirkel med senter i origo og radius 1:

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2}$$



Vi ser med én gang at det umulig kan finnes en funksjon $y(x)$ hvis graf er lik hele sirkelen: For eksempel vet vi at både topp- og bunnpunktene $(0, 1)$ og $(0, -1)$ ligger på denne kurven, så da måtte en slik funksjon oppfylle både $y(0) = 1$ og $y(0) = -1$ samtidig — en umulighet. Av samme grunn kan vi ikke skrive x som en funksjon av y.

Vi kan derimot finne funksjoner som *lokalt* har graf lik kurven: Om vi løser ligning (2) for y får vi de to løsningene

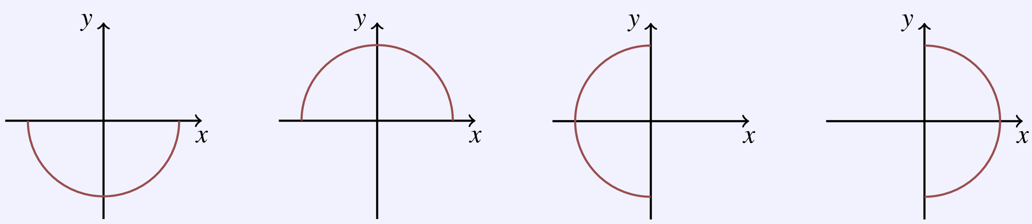
$$y_1(x) = -\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{og} \qquad y_2(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Det er klart at selv om ingen av de to grafene er i stand til å tegne *hele* kurven, vil de to grafene *sammen* tegne hele kurven. Med andre ord: for ethvert punkt $\mathbf{p}$ på kurven *(med to unntak!)* kan vi finne en funksjon hvis graf *lokalt* (altså i nærheten av $\mathbf{p}$) stemmer overens med kurven. Dette er sant for alle punkter bortsett fra $\mathbf{p} = (-1, 0)$ og $\mathbf{p} = (1, 0)$ — ved å gå ørlite til venstre for $x = -1$ havner vi utenfor grafene, og det samme om vi går til høyre for $x = 1$.

Dette kan vi løse ved å løse ligning (2) for x, som gir de to løsningene

$$x_1(y) = -\sqrt{1 - y^2} \qquad \text{og} \qquad x_2(y) = \sqrt{1 - y^2}.$$

Grafene til x_1 og x_2 (det vil si kurvene bestående av alle punkter (x, y) slik at henholdsvis $x = x_1(y)$ og $x = x_2(y)$) er nå lik sirkelen i nærheten av henholdsvis $(-1, 0)$ og $(1, 0)$ (og alle andre punkter der enten $x < 0$ eller $x > 0$).



$y_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ $\qquad$ $y_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad$ $x_1(y) = -\sqrt{1 - y^2}$ $\qquad$ $x_2(y) = \sqrt{1 - y^2}$

Noe mer abstrakt spør vi nå følgende:

Problem. Gitt et skalarfelt $F(x, y)$ og et punkt (a, b) der $F(a, b) = 0$, kan vi finne en funksjon $y = y(x)$ (eller $x = x(y)$) slik at $y(a) = b$ og

$$F(x, y(x)) = 0 \tag{3}$$

for alle x i nærheten av a (eller $F(x(y), y) = 0$ for alle y i nærheten av b)?

Vi kaller $y(x)$ (eller $x(y)$) en *implisitt definert funksjon* — det eneste vi vet om den er at den må oppfylle ligning (3). Med «x i nærheten av a» mener vi at x ligger i en åpen mengde som inneholder a, det vil si $x \in (c, d)$ for tall $c < a < d$.

Vi kan tolke ligningen $F(x, y) = 0$ som uttrykket for en kurve i planet. (Mer spesifikt er kurven $F(x, y) = 0$ en nivåkurve for F.) Det å finne en funksjon $y(x)$ slik at ligning (3) holder, er det samme som å finne en funksjon hvis graf er lik denne kurven. I eksemplet med enhetssirkelen er $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, og (a, b) er et hvilket som helst punkt på kurven $F(x, y) = 0$. Vi fant der at vi kan velge funksjonen

$$\begin{aligned} y &= y_1(x) \text{ om } b < 0 & \qquad x &= x_1(y) \text{ om } a < 0 \\ y &= y_2(x) \text{ om } b > 0 & \qquad x &= x_2(y) \text{ om } a > 0. \end{aligned}$$

I de fleste tilfeller vil det være vanskelig å finne et *eksplisitt* uttrykk for den implisitt definerte funksjonen $y(x)$ i ligning (3). Overraskende nok viser det seg at det er lett å finne den deriverte $\frac{dy}{dx}$ til y, selv uten et eksplisitt uttrykk for $y(x)$. Teknikken for å finne denne deriverte, som vi skal se på i seksjon 6.1, kalles *implisitt derivasjon*. Det viser seg også at ved å beregne $\frac{dy}{dx}$ finner vi en betingelse som *garanterer* eksistensen av funksjonen $y(x)$. Dette er det *implisitte funksjonsteoremet*, som vi ser på i seksjon 6.2.

6.1 Implisitt derivasjon

La nå (a, b) være et punkt som oppfyller $F(a, b) = 0$, og *anta* at det finnes en funksjon $y(x)$ som oppfyller ligning (3), og som er slik at $y(a) = b$. (Med andre ord er (a, b) et punkt på kurven $F(x, y) = 0$, og $y(x)$ er en funksjon hvis graf er lik kurven i nærheten av (a, b).) Vi deriverer ligning (3) med hensyn på x og får

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x)$$

(hvor vi har brukt kjerneregelen for skalarfeltet F). Uttrykket over kan vi løse med hensyn på $\frac{dy}{dx}$ og få

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$$

såfremt nevneren $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))$ er ulik 0.

På samme måte kan vi betrakte x som en funksjon av y, og derivere ligning (3) med hensyn på y. Vi får da

$$\frac{dx}{dy}(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x(y), y)}$$

og vi ser her at $\frac{\partial F}{\partial x}$ må være ulik 0.

Eksempel. *Finn $\frac{dx}{dy}$ om $xy^3 + x^4 y = 2$.*

Vi betrakter x som en funksjon av y og deriverer på begge sider:

$$\frac{d}{dy}(xy^3 + x^4 y) = \frac{d}{dy} 2.$$

Siden $\frac{d}{dy}2 = 0$ får vi

$$0 = \frac{d}{dy}(xy^3 + x^4y) = \frac{dx}{dy}y^3 + 3xy^2 + 4x^3\frac{dx}{dy}y + x^4$$
$$= \frac{dx}{dy}(y^3 + 4x^3y) + 3xy^2 + x^4$$

Om vi løser for $\frac{dx}{dy}$ får vi

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{3xy^2 + x^4}{y^3 + 4x^3y}.$$

Et relatert problem er følgende:

Problem. Gitt et skalarfelt $F(x, y, z)$ og et punkt (a, b, c) der $F(a, b, c) = 0$, kan vi finne et skalarfelt $z = z(x, y)$ slik at $z(a, b) = c$ og

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \tag{4}$$

for alle (x, y) i nærheten av (a, b)?

Her er vi altså gitt et uttrykk for en flate i rommet (nivåflaten $F(x, y, z) = 0$), og spør om vi kan finne et skalarfelt $z(x, y)$ hvis graf $z = z(x, y)$ er lik flaten — i alle fall lokalt rundt punktet (a, b, c). Ved å partiellderivere ligning (4) med hensyn på for eksempel x finner vi at

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}$$

som gir mening såfremt $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Eksempel. *Finn et uttrykk for* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *når* $z^2 + xy^3 = \frac{xz}{y}$. *Beregn* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *i punktet* $(x, y, z) = (\frac{9}{2}, 1, 3)$.

Vi betrakter z som en funksjon av x og y og partiellderiverer med hensyn på y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^2 + xy^3\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz}{y}\right)$$
$$\iff \qquad 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 3xy^2 = \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{xz}{y^2}$$

(merk at x er en uavhengig variabel, så den er som en konstant å regne når vi partiellderiverer med hensyn på y). Om vi løser for $\frac{\partial z}{\partial y}$ får vi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{xz}{y^2} + 3xy^2}{2z - \frac{x}{y}} = \frac{xz + 3xy^4}{xy - 2zy^2}.$$

Vi dobbeltsjekker at punktet $(x, y, z) = (\frac{9}{2}, 1, 3)$ faktisk ligger på flaten:

$$z^2 + xy^3 = 3^2 + \frac{9}{2} \cdot 1^3 = \frac{27}{2}, \qquad \text{mens} \qquad \frac{xz}{y} = \frac{\frac{9}{2} \cdot 3}{1} = \frac{27}{2},$$

så de to uttrykkene er like. Vi setter til slutt inn i uttrykket for $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,3) = \frac{\frac{9}{2}\cdot 3 + 3\cdot\frac{9}{2}\cdot 1^4}{\frac{9}{2}\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1^2} = -18.$$

6.2 Implisitt funksjonsteorem

Vi har sett i seksjon 6.1 at vi kan finne den deriverte til $y(x)$ (eller $x(y)$) så lenge $\frac{\partial F}{\partial y}$ (eller $\frac{\partial F}{\partial x}$) er ulik 0. Det viser seg at betingelsen om at denne partiellderiverte er ulik 0 *garanterer* at det faktisk eksisterer en slik funksjon $y(x)$ (eller $x(y)$).

Teorem 9 (Implisitt funksjonsteorem)**.** La $F(x,y)$ være et kontinuerlig skalarfelt slik at $\frac{\partial F}{\partial y}$ er kontinuerlig, og la (a,b) være et punkt der $F(a,b)=0$ og $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$. Da eksisterer det et tall $\varepsilon > 0$ og en kontinuerlig deriverbar funksjon $y(x)$ slik at

$$F(x,y(x)) = 0 \qquad \text{for alle } x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Merknad. Tommelfingerregelen er som følger. Når vi implisittderiverer et uttrykk og løser for $\frac{dy}{dx}$ (eller $\frac{dx}{dy}$) må vi nødvendigvis dividere med et uttrykk, nemlig koeffisienten til $\frac{dy}{dx}$. Så lenge denne koeffisienten er ulik 0 får vi lov til å dividere den på begge sider, *og da sier det implisitte funksjonsteoremet at den implisitte funksjonen $y(x)$ faktisk eksisterer.* Det finnes en lang rekke generaliseringer av det implisitte funksjonsteoremet, men alle sammen sier følgende: *Så lenge du ikke dividerer med 0 når du implisittderiverer, eksisterer den implisitte funksjonen.*

Bevis av teorem 9. Siden $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ må denne partiellderiverte enten være positiv eller negativ. Vi antar her at $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$; tilfellet < 0 bevises på samme måte. Siden $\frac{\partial F}{\partial y}$ er et kontinuerlig skalarfelt må også $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$ for punkter (x,y) i nærheten av (a,b) — mer presist finnes det et tall $\delta > 0$ slik at

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0 \qquad \text{for alle } (x,y) \in [a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta].$$

Siden $F(a,b)=0$ og $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$, må

$$F(a,y) < 0 \text{ for } b-\delta \leqslant y < b \qquad \text{og} \qquad F(a,y) > 0 \text{ for } b < y \leqslant b+\delta.$$

Siden F er kontinuerlig, kan vi finne et tall $\varepsilon \in (0,\delta)$ slik at

$$F(x, b-\delta) < 0 \qquad \text{og} \qquad F(x, b+\delta) > 0 \qquad \text{for alle } x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Om vi holder x fast, har vi nå et skalarfelt $F(x,y)$ av y som er strengt voksende og som tar både negative og positive verdier i intervallet $y \in [b-\delta, b+\delta]$. Ifølge middelverdisetningen finnes det da et tall, som vi kan kalle $y(x)$, der denne funksjonen er lik 0, det vil si

$$F(x,y(x)) = 0.$$

Dette argumentet kan vi gjenta for *alle* $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Beviset for kontinuitet og deriverbarhet av $y(x)$ kan man finne i flere avanserte kalkulusbøker, for eksempel Körner – *A Companion to Analysis* eller Rudin – *Principles of Mathematical Analysis*. □